

**MÉMOIRE PRÉSENTÉ COMME  
EXIGENCE PARTIELLE DE LA  
MAÎTRISE EN INGÉNIERIE**

**CONTRIBUTION A LA COMMANDE ADAPTATIVE  
ET ROBUSTE D'UN ROBOT MOBILE DE TYPE  
UNICYCLE AVEC MODELE NON-LINEAIRE**

---

**Présenté par :**  
***BENOIT BELOBO MEVO***

---

**Sous la supervision de**  
***Mohamad Saad (Ing. PhD, Pr. Titulaire)***

---

***Mai 2019***

---



Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue  
Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue

### **Mise en garde**

La bibliothèque du Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue et de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue a obtenu l'autorisation de l'auteur de ce document afin de diffuser, dans un but non lucratif, une copie de son œuvre dans Depositum, site d'archives numériques, gratuit et accessible à tous.

L'auteur conserve néanmoins ses droits de propriété intellectuelle, dont son droit d'auteur, sur cette œuvre. Il est donc interdit de reproduire ou de publier en totalité ou en partie ce document sans l'autorisation de l'auteur.

### **Warning**

The library of the Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue and the Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue obtained the permission of the author to use a copy of this document for non-profit purposes in order to put it in the open archives Depositum, which is free and accessible to all.

The author retains ownership of the copyright on this document. Neither the whole document, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

## REMERCIEMENTS

Le présent travail a été réalisé à l'École de Génie de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue (UQAT), sous la direction de Monsieur Mohamad SAAD (ing, Ph. D), professeur titulaire à l'UQAT.

Je tiens tout d'abord à remercier très chaleureusement mon directeur de recherche, le Professeur **Mohamad SAAD**, qui a accepté de diriger mes travaux de recherche, qui a joué un rôle important dans ma formation académique et surtout pour sa prompte réaction face à nos multiples questions et problèmes d'ordre académique.

Tous mes sincères remerciements au Professeur **Walid GHIE** pour ses conseils et le soutien moral.

Je remercie également tous les membres du jury de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette soutenance de mémoire. Aussi mes remerciements vont à mes grands frères **Julien BEVA** et **Achille Wankeu** qui m'ont accueilli ici en ABITIBI.

Je remercie mes parents, mes frères et sœurs qui m'ont assisté moralement. Enfin, je remercie ma famille : **Karl-Gabriel**, **Emmanuel Arthur** et **Liliane** pour leurs soutiens quotidiens indéfectibles à l'égard de mes travaux de maîtrise.

## RESUME

Le présent travail porte sur l'élaboration d'une loi de commande adaptative et robuste appliquée sur les robots mobiles de types unicycle avec modèle non-linéaire.

La variation des paramètres du robot (l'inertie, la masse et le diamètre des roues), les perturbations extérieures, la non linéarité du modèle à commander, les erreurs de mesure dues aux capteurs sont les facteurs qui influencent négativement le suivi de trajectoire des robots mobiles. Une loi de commande qui prendrait en compte ces différents facteurs serait une solution adéquate à ce problème de commande.

La loi de contrôle proposée est basée sur la technique de commande par mode glissant. Elle est dite adaptative car elle tient compte de l'incertitude des paramètres du robot tels que la masse de la plateforme, l'inertie et le diamètre des roues ; elle est également robuste car elle tient compte des perturbations extérieures (le vent, les glissements entre la roue et la surface de roulement). Notons que, comparativement à certains travaux antérieurs, la loi de commande a été élaborée sur le modèle non-linéaire du robot car le système réel physique étudié est un système non-linéaire.

Les paramètres du robot tels que le diamètre des roues, la masse de la plateforme et l'inertie, utilisés lors de la simulation sont les paramètres réels du robot PIONNER 3DX. Afin d'assurer un meilleur suivi de trajectoire, la loi de contrôle ici élaborée est constituée de deux boucles, imbriquée l'une dans l'autre. La boucle interne représente la partie dynamique du robot et la boucle externe représente la partie cinématique du robot.

Plusieurs tests ont été effectués dans l'environnement MATLAB/SIMULINK® afin d'observer la trajectoire suivie par le robot après que l'on ait appliquée cette commande.



## ABSTRACT

The tracking control of wheeled mobile robot is a complex problem that is encountered in robotic science. In real applications, many serious difficulties affect the control of the robot. Nonlinear model, parameters (inertia, mass and wheel diameter) uncertainties, measurement error due to the sensors and external disturbances limit the study of mobile robot tracking control. In this work we developed an adaptive and robust control law applied to unicycle-type mobile robots with non-linear model. The proposed control law is based on the sliding mode control. It is called adaptive because it takes into account the uncertainty of the robot parameters such as the mass of the platform, the inertia and the diameter of the wheels; it is also robust because it takes into account external disturbances (wind and sliding between the wheel and the running surface). Note that, compared to some previous work, the control law was developed on the non-linear model of the robot because the physical system studied is a non-linear system.

The robot parameters such as wheel diameter, platform mass and inertia used during the simulation are the actual parameters of the PIONNER 3DX robot. In order to ensure better trajectory tracking, the control law developed here consists of two loops, one nested in the other. The inner loop represents the dynamic part of the robot and the outer loop represents the kinematic part of the robot. Several tests were performed in the MATLAB/SIMULINK® environment to observe the trajectory followed by the robot after this command was applied.

## **TABLE DE MATIERES**

|  |            |
|--|------------|
| <b>REMERCIEMENTS.....</b>  | <b>i</b>   |
| <b>RESUME.....</b>   | <b>ii</b>  |
| <b>ABSTRACT .....</b>  | <b>iii</b> |
| <b>1. INTRODUCTION .....</b>                                     | <b>1</b>   |
| <b>2. MOTIVATIONS SOCIO-ECONOMIQUES.....</b>                     | <b>2</b>   |
| <b>3. PROBLEMATIQUE .....</b>                                    | <b>4</b>   |
| <b>4. OBJECTIFS DU SUJET DE RECHERCHE .....</b>                  | <b>5</b>   |
| 4.1. Objectif général.....                                       | 5          |
| 4.2. Objectifs spécifiques .....                                 | 5          |
| <b>5. LIMITATIONS DU SUJET .....</b>                             | <b>6</b>   |
| <b>6. APERCU DU SUJET .....</b>                                  | <b>6</b>   |
| <b>CHAPITRE 1 : REVUE DE LITTERATURE.....</b>                    | <b>7</b>   |
| 1. Problèmes de commande .....                                   | 8          |
| 1.1. Le suivi de chemin.....                                     | 8          |
| 1.2. Le suivi de trajectoire .....                               | 8          |
| 1.3. La stabilisation de configuration fixe .....                | 9          |
| 2. Les commandes en robotique mobile.....                        | 9          |
| 2.1. Commande basée sur un régulateur PID.....                   | 9          |
| 2.2. Commande basée sur la linéarisation exacte .....            | 12         |
| 3. Commande basée sur le modèle cinématique du robot. ....       | 14         |
| 4. Commande basée sur le Backstepping.....                       | 14         |
| 5. Commande basée sur le mode glissant.....                      | 16         |
| 6. Commande basée sur la fonction de Lyapunov.....               | 17         |
| 7. Commande adaptative.....                                      | 17         |
| 8. Commande basée sur les réseaux de neurones.....               | 19         |
| 9. Méthodologie.....   | 20         |
| 9.1. Cadre scientifique .....                                    | 20         |
| 9.2. Démarche .....  | 21         |
| <b>CHAPITRE 2 : ROBOTS MOBILES A ROUES ET MODELISATION .....</b> | <b>22</b>  |
| 1. Généralités sur les robots mobiles.....                       | 23         |
| 1.1. Classification des robots .....                             | 23         |
| 1.2. Types des robots mobiles à roues .....                      | 24         |
| 1.3. Eléments constitutifs d'un robot .....                      | 28         |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>2. Modélisation.....</b>   | <b>30</b> |
| 2.1. Présentation du robot mobile .....   | 30        |
| 2.2. Modélisation Cinématique .....   | 32        |
| 2.3. Modélisation dynamique .....   | 37        |
| <b>CHAPITRE 3 : SYSTEMES NON LINEAIRES ET COMMANDES.....</b>  | <b>43</b> |
| <b>1. Les systèmes non-linéaires.....</b>   | <b>45</b> |
| 1.1. Représentation des systèmes non-linéaires .....  | 45        |
| 1.2. Système autonome.....  | 46        |
| 1.3. Systèmes à structures variables .....  | 46        |
| 1.4. Équilibre .....  | 47        |
| 1.5. Plan de phase.....   | 47        |
| 1.6. Stabilité locale et stabilité globale.....   | 48        |
| <b>2. Les commandes non-linéaires. ....</b>   | <b>50</b> |
| 2.1. Commande par linéarisation.....  | 50        |
| 2.2. Commandes adaptatives.....   | 53        |
| <b>CHAPITRE 4 : COMMANDE PAR MODE GLISSANT ADAPTATIF APPLIQUEE<br/>AU ROBOT MOBILE UNICYCLE .....</b> | <b>61</b> |
| <b>1. Les modèles du robot.....</b>   | <b>62</b> |
| 1.1. Le modèle cinématique .....  | 62        |
| 1.2. Le modèle dynamique du robot .....   | 63        |
| <b>2. Architecture de contrôle.....</b>   | <b>64</b> |
| 2.1. Les contrôleurs .....  | 65        |
| 2.2. Le contrôleur cinématique .....  | 65        |
| 2.3. Le contrôleur dynamique .....  | 69        |
| <b>3. La Commande par mode glissant classique .....</b>   | <b>69</b> |
| 3.1. Principe .....   | 69        |
| 3.2. La surface de glissement.....  | 71        |
| 3.3. Condition d'existence du mode de glissant .....  | 71        |
| 3.4. Calcul de la commande.....   | 72        |
| <b>4. La commande par mode glissant adaptatif.....</b>  | <b>74</b> |
| 4.1. Commande par mode glissant adaptatif avec gain constant .....                                    | 75        |
| 4.2. Commande par mode glissant adaptatif avec gain variant dans le temps .....                       | 78        |
| <b>CHAPITRE 5 : SIMULATIONS ET INTERPRETATIONS .....</b>  | <b>81</b> |
| <b>1. Présentation de l'environnement de travail .....</b>  | <b>82</b> |
| 1.1. Caractéristiques du robot.....   | 82        |
| 1.2. Environnement de travail et schéma de commande.....  | 83        |
| 1.3. Trajectoires.....  | 84        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>2. Simulations.....</b>  | <b>85</b>  |
| 2.1. Simulations dans la boucle cinématique .....   | 85         |
| 2.2. Simulation de la commande par mode glissant classique dans la boucle cinématique et<br>dynamique.....  | 92         |
| 2.3. Simulations de la commande par mode glissant adaptatif dans la boucle cinématique et<br>dynamique..... | 113        |
| <b>CHAPITRE 6 : REDUCTION DU PHENOMENE DE BROUITEMENT .....</b>   | <b>119</b> |
| 1. Commande par mode glissant avec observateur de perturbation. ....  | 121        |
| 1.1. Calcul de l'observateur.....   | 122        |
| 1.2. Calcul de la commande.....   | 124        |
| 1.3. Etude de la stabilité.....   | 124        |
| 2. Simulation .....   | 125        |
| 3. Interprétation et comparaison .....  | 129        |
| <b>CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES .....</b>  | <b>131</b> |
| <b>RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....</b>  | <b>133</b> |

## LISTE DE FIGURES

|   |    |
|---|----|
| Figure 1: Paramètres du modèle d'Ackermann. ....                            | 10 |
| Figure 2: Organigramme des travaux .....                                    | 21 |
| Figure 3: Robot mobile de type unicycle [23]. ....                          | 25 |
| Figure 4: Robot mobile de type tricycle [23].....                           | 26 |
| Figure 5: Robot mobile de type voiture [23] .....                           | 27 |
| Figure 6: Robot mobile de type omnidirectionnel [2] .....                   | 27 |
| Figure 7: Schéma d'illustration des éléments constituant d'un robot .....   | 28 |
| Figure 8: Schéma d'un robot mobile de type unicycle [2].....                | 31 |
| Figure 9: Image du robot PIONEER 3DX .....                                  | 31 |
| Figure 10: Robot mobile dans le repère fixe.....                            | 32 |
| Figure 11: Caractérisation du roulement sans glissement .....               | 34 |
| Figure 12: Trajectoire d'un système dans le plan de phase [1] .....         | 48 |
| Figure 13: Commande adaptative indirecte [25] .....                         | 54 |
| Figure 14: Commande adaptative directe [25] .....                           | 54 |
| Figure 15: Commande adaptative par modèle de référence [25].....            | 55 |
| Figure 16: Commande adaptative basée sur Lyapunov [25].....                 | 57 |
| Figure 17: Architecture de commande.....                                    | 65 |
| Figure 18: Représentation de l'erreur de posture du robot.....              | 66 |
| Figure 19: Illustration du mode glissant dans le plan de phase .....        | 70 |
| Figure 20: Schéma de principe de la commande non adaptative. ....           | 74 |
| Figure 21: Schéma de principe de la commande adaptative. ....               | 75 |
| Figure 22: Schéma de commande en boucle cinématique. ....                   | 83 |
| Figure 23: Schéma de commande en boucles cinématique et dynamique. ....     | 83 |
| Figure 24: Courbes des vitesses pour le modèle cinématique du robot.....    | 85 |
| Figure 25: Position en x, et son erreur. ....                               | 86 |
| Figure 26: Position en y, et son erreur. ....                               | 86 |
| Figure 27: Angle $\theta$ et son erreur. ....                               | 87 |
| Figure 28: Trajectoire de référence et trajectoire suivie par le robot..... | 87 |
| Figure 29: Courbes des vitesses pour le modèle cinématique du robot.....    | 89 |
| Figure 30: Position en x, et son erreur. ....                               | 89 |
| Figure 31: Position en y, et son erreur. ....                               | 90 |
| Figure 32: Angle $\theta$ et son erreur .....                               | 90 |
| Figure 33: Trajectoire de référence et trajectoire suivie par le robot..... | 91 |
| Figure 34: Courbes des vitesses pour le modèle linéaire du robot.....       | 92 |
| Figure 35: Position en x et son erreur. ....                                | 93 |
| Figure 36: Position en y et son erreur. ....                                | 93 |
| Figure 37: Angle $\theta$ et son erreur. ....                               | 94 |
| Figure 38: Couples moteurs et Trajectoire cartésienne. ....                 | 94 |
| Figure 39: Courbes des vitesses pour le modèle linéaire du robot.....       | 96 |
| Figure 40: Position en x et son erreur.....                                 | 96 |
| Figure 41: Position en y et son erreur. ....                                | 97 |

|   |     |
|---|-----|
| Figure 42: Angle $\theta$ et son erreur. ....   | 97  |
| Figure 43: Couples moteurs et trajectoire cartésienne.....  | 98  |
| Figure 44: Courbes des vitesses pour le modèle linéaire du robot.....   | 99  |
| Figure 45: Position en x et son erreur. ....  | 100 |
| Figure 46: Position en y et son erreur. ....  | 100 |
| Figure 47: Angle $\theta$ et son erreur. ....   | 101 |
| Figure 48: Couples moteurs et trajectoire cartésienne.....  | 101 |
| Figure 49: Courbes des vitesses pour le modèle non-linéaire du robot. ....  | 103 |
| Figure 50: Position en x et son erreur pour le modèle non-linéaire du robot.....  | 103 |
| Figure 51: Position en y et son erreur pour le modèle non-linéaire du robot. ....   | 104 |
| Figure 52: Angle $\theta$ et son erreur pour le modèle non-linéaire du robot. ....  | 104 |
| Figure 53: Couples moteurs et trajectoire cartésienne.....  | 105 |
| Figure 54: Courbes des vitesses pour le modèle non-linéaire du robot. ....  | 106 |
| Figure 55: Position en x et son erreur pour le modèle non-linéaire du robot. ....   | 107 |
| Figure 56: Position en y et son erreur pour le modèle non-linéaire du robot. ....   | 107 |
| Figure 57: Angle $\theta$ et son erreur pour le modèle non-linéaire du robot. ....  | 108 |
| Figure 58: Couples moteurs et trajectoire cartésienne.....  | 108 |
| Figure 59: Courbes des vitesses du modèle non-linéaire avec paramètres inconnus.....                                      | 110 |
| Figure 60: Position en x et son erreur du modèle non-linéaire avec paramètres inconnus. ....                              | 110 |
| Figure 61: Position en y et son erreur du modèle non-linéaire avec paramètres inconnus. ....                              | 111 |
| Figure 62: Angle $\theta$ et son erreur du modèle non-linéaire avec paramètres inconnus. ....                             | 111 |
| Figure 63: Couples moteurs et trajectoire cartésienne.....  | 112 |
| Figure 64: Masse et inertie variant dans le temps.....  | 112 |
| Figure 65: Courbes des vitesses du modèle non-linéaire du robot avec paramètres inconnus. ....                            | 114 |
| Figure 66: Position en x et son erreur du modèle non-linéaire du robot avec paramètres inconnus.<br>.....                 | 114 |
| Figure 67: Position en y et son erreur du modèle non-linéaire avec paramètres inconnus. ....                              | 115 |
| Figure 68: Angle d'orientation $\theta$ et son erreur du modèle non-linéaire avec paramètres inconnus.<br>.....           | 115 |
| Figure 69: Couples moteurs et trajectoire cartésienne du modèle non-linéaire avec paramètres<br>inconnus. ....            | 116 |
| Figure 70: Evolution de la masse et de l'inertie perturbées et adaptées.....  | 116 |
| Figure 71: Schéma de commande basé sur un observateur de perturbation.....  | 122 |
| Figure 72: Courbes des vitesses du modèle non-linéaire obtenues par un observateur non linéaire<br>de perturbations. .... | 126 |
| Figure 73: Position en x et son erreur. ....  | 127 |
| Figure 74: Position en y et son erreur. ....  | 127 |
| Figure 75: Angle $\theta$ et son erreur. ....   | 128 |
| Figure 76: Couples moteurs et trajectoire cartésienne.....  | 128 |

## 1. INTRODUCTION

Au-delà des applications industrielles classiques, les robots sont de plus en plus présents dans notre quotidien avec de grands domaines d'applications tels que la médecine, l'agriculture, la sécurité ou l'assistance à domicile. Ces robots sont également de plus en plus mobiles, capables d'évoluer aussi bien dans des milieux aériens ou maritimes que terrestres. La robotique mobile terrestre occupe une place historique importante. Notamment, les robots mobiles à roues qui empruntent un mode de locomotion par roulement particulièrement efficace sont déjà utilisés dans le domaine industriel comme la logistique, l'agriculture avec l'automatisation des tracteurs, le spatial et l'exploration planétaire, dans des tâches de sécurité telles que la surveillance de zone, ou encore pour des missions de recherche et de secours de victimes en cas de catastrophes naturelles ou industrielles.

Compte tenu des diverses contraintes du milieu environnant, de la non-linéarité du modèle, des incertitudes des paramètres liés au robot et de la non-holonomie qui caractérise le robot mobile, les commandes classiques de types linéaires notamment de type PID, ont montré leurs limites. Face à cette situation, des recherches ont été menées vers l'élaboration des commandes non linéaires. On peut citer entre autres la commande par Backstepping, la commande par linéarisation, la commande à structures variables, etc. La problématique étant de déplacer le robot d'un point de départ à un point d'arrivée en suivant une trajectoire, la commande par mode glissant est une commande qui présente des avantages beaucoup plus importants à cause de sa simplicité et de sa robustesse face aux perturbations, aux incertitudes et aux non linéarités du système.

Notre travail intitulé '**Commande adaptative et robuste des robots mobiles de type unicycle**' est une contribution majeure parmi tant d'autres que nous apportons en ce qui concerne la commande des robots mobiles. Cette commande basée sur le mode glissant consiste à définir une surface appelée surface de glissement à partir de laquelle on pourra obtenir la loi de commande. La conception de cette commande se passe en deux étapes : premièrement le choix de la surface de glissement, deuxièmement la condition de glissement. Afin de rendre la commande adaptative, nous associons à cette commande une loi d'adaptation.

## **2. MOTIVATIONS SOCIO-ECONOMIQUES**

La présence des robots se fait ressentir partout : dans les usines et dans les champs, au fond des mers et dans l'espace, dans les jardins et les salons. Ils ont une importance économique grandissante, et d'aucuns prédisent qu'ils seront au XXI<sup>e</sup> siècle ce que la voiture fut au XX<sup>e</sup> siècle. En outre, ils n'ont pas seulement pénétré le monde industriel, ils sont aussi entrain de pénétrer notre vie quotidienne et notre culture, et certains d'entre eux participent au renouvellement de la vision que nous avons de nous-même. Cette révolution annoncée, dont l'impact sur la science, l'industrie et la société sera potentiellement très grand, va cependant de paire avec un certain nombre de grands défis à résoudre, tant technologiques que sociétaux.

Vu sous l'aspect de la robotique d'exploration, ils sont devenus des outils essentiels pour aller découvrir des environnements inconnus ou dangereux. Grâce à eux, nous pouvons continuer sur les pas des grands explorateurs des siècles précédents et découvrir des mondes où l'homme ne peut pas aller. Les plus connus d'entre eux sont probablement Sojourner, Spirit et Opportunity, qui ont posé leurs roues sur Mars et nous ont permis de découvrir la planète rouge à travers leurs yeux. Grâce à eux, notre connaissance des propriétés géophysiques, topographiques et chimiques de Mars a progressé considérablement. Sur terre, le rôle des robots mobiles d'exploration va aussi devenir de plus en plus essentiel pour intervenir dans des zones terrestres très dangereuses, que ce soit par exemple dans les décombres d'une ville à la suite d'un tremblement de terre, dans une centrale nucléaire à la suite d'un accident, ou dans les mines souterraines.

Dans les domaines civils et militaire, les véhicules terrestres, aériens ou aquatiques robotisés sont utilisés pour surveiller les frontières, le trafic des bateaux, les feux de forêts, la pêche illégale, les mouvements de foule, etc. Un certain nombre de défis se posent aux robots d'exploration et d'intervention en milieu hostile est qu'ils soient autonomes pour réaliser la mission qu'on leur a donnée, ou semi-autonome quand ils sont partiellement téléguidés par un opérateur humain.



### **La mobilité en milieu hostile.**

Comment fabriquer des robots capables de se déplacer dans un champ de ruines ou sur une planète couverte d'obstacles rocheux et de crevasses ? Comment fabriquer des robots de petite taille capables de se déplacer dans toutes les conditions atmosphériques ? Deux grandes approches se distinguent concernant la morphologie des robots et le mode de propulsion : d'une part la robotisation de véhicules « classiques » à roues (rovers martiens), à hélices (sous-marins automatiques de l'IFREMER) ou à réacteurs (drones en forme de petits avions), et d'autre part l'élaboration de formes et de matériaux qui s'inspirent du vivant. C'est par exemple le cas des robots à pattes (le robot de déforestation), de robots dont les ailes battent comme celles des insectes, ou de robots qui nagent en ondulant leur corps comme les poissons.

### **Autonomie énergétique.**

Dans les milieux hostiles. Il est par définition très difficile de trouver des stations de recharge énergétique (électrique ou à base d'énergie fossile), et il est très souvent impossible de supposer que le robot pourra revenir en zone « technicisée » pendant le cours de sa mission. Comment peut-on construire des robots qui soient autonomes énergétiquement et puissent réaliser des missions de longue durée ? Ce défi impose d'une part de développer des techniques permettant aux robots de capter les sources d'énergie disponible sur leur lieu d'intervention (énergie solaire, gradients de températures et puissance des courants marins, vent, biomasse), et d'autre part d'élaborer des robots les plus économes possibles en énergie.

### **Contrôle, communication et traitement de l'information.**

Pour réaliser leurs tâches, les robots devront pouvoir être contrôlés. Hors, cela implique des capacités de stockage et de traitement de l'information, ce qui représente un immense défi. Comment pourrait-on commander un robot si l'on ne connaît pas les valeurs exactes de ses paramètres ?

Comment diriger le robot dans un environnement non parfaitement connu ?

Dans un premier temps, un certain nombre de chercheurs proposent que ce contrôle se fasse à distance, sous la forme d'un « téléguidage », réduisant les fonctionnalités embarquées du robot au seul stockage de l'information et à son envoi et sa réception depuis un système extérieur opéré par un humain. Le défi qui se pose est alors celui d'améliorer l'interface opérant entre le robot et le système technique extérieur : par quel moyen peut-on envoyer des commandes au robot et recevoir les informations captées par ses senseurs ? Dans un second temps, rendre le robot autonome en implantant en son sein une structure de lois de contrôle qui malgré les circonstances extérieures, les non-linéarités et les incertitudes pourra s'adapter et suivre la commande.

### **3. PROBLEMATIQUE**

Depuis un quart de siècle, en science robotique, un nombre très important de publications a été consacré au problème de l'analyse et de la synthèse de lois de commande pour les systèmes non linéaires. Contrairement au cas de systèmes linéaires pour lesquels l'automatique fournit une panoplie de méthodes pour la synthèse de la commande, les systèmes non linéaires ne disposent pas d'outils et de méthodes générales pour réaliser cette analyse et/ou une synthèse des lois de commande. Ceci est dû au fait que les systèmes non linéaires peuvent posséder des dynamiques complexes et des structures extrêmement variées.

La non-linéarité, la présence des perturbations intérieures et extérieures, l'incertitude des paramètres, les erreurs de modélisation des systèmes physiques à commander, l'imperfection des appareils des mesures (capteurs) sont les maux qui influencent le choix et l'élaboration des techniques de commande. En robotique mobile, le suivi de trajectoire ou le suivi de chemin sont, en général, les deux grandes tâches à accomplir par le robot mobile lors de son déplacement.

Les travaux menés sur l'élaboration des lois de commande pour les systèmes non linéaires ont permis de proposer plusieurs lois. Malgré tout ceci, il n'existe pas de technique standard de synthèse de lois face à un problème précis dans le cas des systèmes non-linéaires [1].

Face à tous ces faits, l'élaboration d'une loi de commande adaptative serait un moyen palliatif pour résoudre l'épineux problème. Entre autres, un minimum d'expertise dans la synthèse des lois de commande non linéaire et une connaissance parfaite de la physique du système à commander seront des atouts majeurs lors de l'élaboration de la loi de commande. Dans notre cas, puisque la loi de commande sera basée sur le mode glissant, l'adaptation des paramètres du système et la réduction du phénomène de chattering sont les problèmes à étayer.

#### **4. OBJECTIFS DU SUJET DE RECHERCHE**

##### **4.1. Objectif général**

L'objectif général est de diriger le robot à partir d'une loi de contrôle afin que ce dernier suive la trajectoire désirée.

##### **4.2. Objectifs spécifiques**

- Modéliser le robot tout en considérant les non linéarités du modèle ;
- Trouver une loi de commande robuste qui tient compte des aléas du système telles que les incertitudes des paramètres, les perturbations extérieures et la forme non linéaire du modèle du robot ;
- Réduire la distance entre la position réelle du robot et la position virtuelle (position de référence) lorsque le temps tend vers l'infini ;
- Réduire l'erreur de l'angle d'orientation du robot ;
- Egaliser les vitesses qui existent entre le contrôleur cinématique et le contrôleur dynamique ;
- Assurer la stabilité du système via une fonction de Lyapunov.

## **5. LIMITATIONS DU SUJET**

Après avoir définis les objectifs et la problématique de notre sujet de recherche, il convient de souligner les limites qui influencent l'étude de ce sujet.

Ces limites sont les suivantes :

- La non linéarité du système étudié ;
- L'incertitude des paramètres du système.

## **6. APERCU DU SUJET**

Pour atteindre l'objectif escompté, nous avons organisé le travail comme suit : Dans le chapitre 1, nous faisons une revue de littérature sur les différentes lois de commandes linéaires et non linéaires. Au chapitre 2, on développe les modèles cinématique et dynamique du robot mobile de type unicycle. Dans le chapitre 3, on présente les grandes notions liées aux systèmes non linéaires et aux commandes non linéaires. Dans le chapitre 4, les lois de commande par mode glissant classique et adaptatives ont été présentées afin de pouvoir commander le robot. Le chapitre 5 est réservé aux simulations. Et enfin au chapitre 6, dans l'optique d'améliorer la loi de commande proposée dans le chapitre 4, on proposera une loi de commande basée sur un observateur non linéaire de perturbation.

## **CHAPITRE 1 : REVUE DE LITTERATURE**

### **Introduction**

#### **1. Problèmes de commande**

- 1.1. Le suivi de chemin
- 1.2. Le suivi de trajectoire
- 1.3. La stabilisation de configuration fixe

#### **2. Les commandes en robotique mobile**

- 2.1. Commande basée sur un régulateur PID
- 2.2. Commande basée sur la linéarisation exacte
- 2.3. Commande basée sur la théorie du control optimal

#### **3. Commande basée sur le modèle cinématique du robot.**

#### **4. Commande basée sur le Backstepping**

#### **5. Commande basée sur le mode glissant**

#### **6. Commande basée sur la fonction de Lyapunov**

#### **7. Commande adaptative**

#### **8. Commande basée sur les réseaux de neurones**

#### **9. Méthodologie**

- 9.1. Cadre scientifique
- 9.2. Démarche

## **Introduction**

Dans cette section, nous présentons des références, non exhaustives, rencontrées dans la littérature autour du sujet proposé. Cette revue de bibliographique est axée sur les tâches couramment rencontrées et effectuées par les robots mobiles ainsi que les lois de commande associées. La commande des robots d'un point de départ à un point d'arrivée nécessite la connaissance des lois de commande. Plusieurs travaux ont été menés concernant ces techniques de commande. En ce qui concerne les robots mobiles à roues, généralement trois cas peuvent se présenter à savoir : le suivi de chemin, le suivi de trajectoire et la stabilisation de configuration fixe. Le travail que nous présentons ici est un éventail de lois de commande permettant de contrôler le robot.

### **1. Problèmes de commande**

#### **1.1. Le suivi de chemin**

Etant donnée une courbe « $\zeta$ » du plan, une vitesse d'avancement  $v$  (non nulle) pour le robot mobile, ainsi qu'un point « $C$ » fixe sur ce robot, on souhaite que le point « $C$ » suive la courbe « $\zeta$ » lorsque le robot roule à la vitesse  $v$ . La variable que l'on doit réguler à zéro est donc la distance du point « $C$ » à la courbe. Ce type de problème correspond à l'exécution d'une trajectoire indépendamment du temps, comme dans l'exemple de la conduite sur route lorsque le conducteur cherche à maintenir une distance constante par rapport à des marquages au sol.

#### **1.2. Le suivi de trajectoire**

Ce problème se distingue du précédent par le fait que la vitesse d'avancement du véhicule n'est plus fixée à l'avance, du fait que l'on cherche également à réguler la distance parcourue le long de la courbe « $\zeta$ ». Cet objectif nécessite de doter la courbe « $\zeta$ » d'une loi horaire, c'est à dire de la paramétrer par la variable temporelle « $t$ ».

Cela revient à définir une trajectoire qui à un instant donné  $t$  associe  $(x_r(t), y_r(t))$  par rapport à un repère de référence  $R$ . On souhaite alors réguler à zéro le vecteur d'erreur  $(x_r(t) - x(t), y_r(t) - y(t))$ , où  $(x(t), y(t))$  désignent les coordonnées du point «C» dans  $R$ , à l'instant  $t$ . Le problème peut également être interprété comme celui consistant à asservir le véhicule qu'on souhaite diriger à un véhicule (virtuel) de référence dont la trajectoire à un instant donné est  $(x_r(t), y_r(t))$ .

### **1.3. La stabilisation de configuration fixe**

Autrement dit, c'est la commande point à point. Dans ce cas une configuration dite de référence est choisie et on cherche à établir une loi de commande permettant au robot d'atteindre la référence. Dans ce dernier cas, les propriétés de non-holonomie telles que : Aucun glissement latéral et le roulement sans glissement, interviennent de façons plus contraignantes. L'utilisation des méthodes classiques d'études des systèmes linéaires s'avèrent insuffisantes.

Les lois de commande que nous avons recensées ici sont celles couramment rencontrés dans la littérature pour résoudre le problème de suivi de chemin, de poursuite de trajectoire et de stabilisation de configuration fixe des robots mobiles.

## **2. Les commandes en robotique mobile**

### **2.1. Commande basée sur un régulateur PID**

Plusieurs travaux se sont basés sur le régulateur PID (Proportionnel - Intégral - Dérivé) pour concevoir un contrôleur. Le régulateur PID calcule l'erreur du système, qui est la différence entre son état actuel et la consigne désirée, et calcule une commande qui minimise cette erreur.

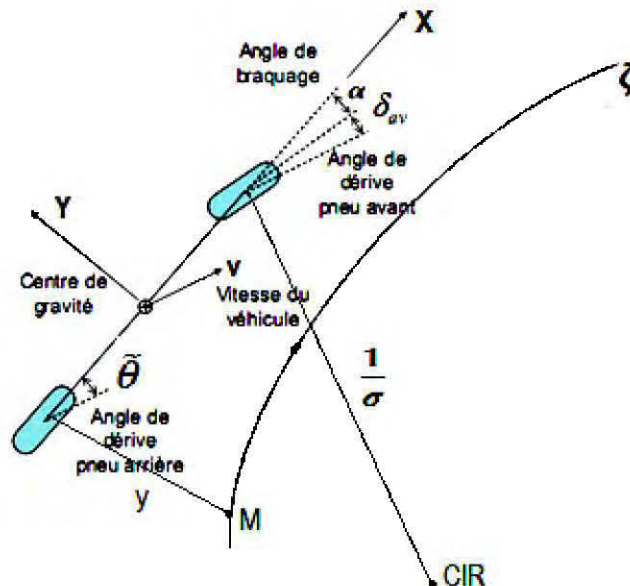
Le calcul de la commande se fait en ajustant les trois paramètres du régulateur :

- **P** relatif à l'erreur courante,
- **I** relatif à l'accumulation des erreurs passées, et
- **D** relatif à la prédiction des futures erreurs.

Ces trois paramètres doivent être choisis de façon à réduire l'erreur statique de la réponse par rapport à la consigne, les oscillations et le dépassement de la réponse.

Quand le système sous-jacent n'est pas connu, le régulateur PID constitue une bonne approche pour construire un contrôleur efficace [2]. Cependant, la commande calculée n'est pas optimale et ne garantit pas la stabilité du système.

Un contrôleur basé sur la linéarisation du système et l'application d'un régulateur proportionnel dérivé est présenté dans [2]. La commande issue de cette approche de contrôle peut être appliquée sur des robots unicycles ou bien sur des robots à deux roues (avant et arrière) directionnelles dans le but de suivre un chemin curviligne quelconque « $\zeta$ ». Un robot unicycle est contrôlé par sa vitesse angulaire, alors qu'un robot à deux roues directionnelles est contrôlé par deux variables : une première commande agit sur l'angle de braquage de la roue avant et une deuxième commande agit sur la distance du centre de la roue avant au centre instantané de rotation du robot. La figure ci-dessous présente les variables de commande du robot selon le modèle classique d'Ackermann des véhicules (également appelé modèle bicyclette).



*Figure 1: Paramètres du modèle d'Ackermann[3].*



$\zeta$  : est la trajectoire à suivre ;  
 $O$  : est le centre de gravité du véhicule ;  
 $M$  : est un point de  $\zeta$  ;  
 $\frac{1}{\sigma}$  : est la distance entre le centre de la roue avant et le centre instantané de rotation ;  
 $y$  : est l'écart latéral du véhicule par rapport à la trajectoire de référence  $\zeta$  ;  
 $\alpha$  : est l'angle de braquage de la roue avant ;  
 $\tilde{\theta}$  : est l'angle de dérive de la roue arrière ;  
 $\delta_{av}$  : est l'angle de dérive du pneu avant ;  
 $s$  : est l'abscisse curviligne de  $M$  le long de la trajectoire ;  
 $V$  : est la vitesse linéaire du véhicule.

Le robot est représenté et localisé par  $(s, y, \tilde{\theta})$  qui représente le vecteur d'état du système à commander.  $s$  et  $y$  permettent de déterminer la position du véhicule par rapport à la référence et  $\tilde{\theta}$  définit l'orientation. L'objectif est d'amener et de maintenir à zéro les paramètres  $y$  et  $\tilde{\theta}$ . Cela revient à convertir le modèle non linéaire régissant le robot (modèle d'Ackermann) en un système linéaire exacte (sans approximation) en faisant un changement de variable. En dérivant le système linéaire obtenu par rapport à l'abscisse curviligne plutôt que par rapport au temps on obtient un modèle linéaire [4]. Le système étant linéaire, la théorie classique de commande peut être utilisée pour construire une loi de commande sous l'hypothèse de roulement sans glissement. Les paramètres  $k_p$  et  $k_d$  d'un contrôleur PD peuvent être assimilés à des gains proportionnels et dérivés de la boucle d'asservissement.

Les travaux effectués sur l'asservissement longitudinal et latéral sur les véhicules d'un convoi proposent aussi un régulateur PID visant à minimiser l'erreur angulaire entre un ensemble de robots successifs d'un convoi [5]. Après avoir calculé l'orientation désirée du robot suiveur, les auteurs déduisent l'erreur angulaire qui n'est autre que la différence entre l'orientation courante du robot et son orientation désirée et appliquent un régulateur PID qui asservit cette erreur autour de zéro.

Dans ces travaux, le contrôleur développé ne garantit pas la stabilité asymptotique du système étant donné que des oscillations non bornées surgissent durant le suivi. De plus, le suivi n'est pas précis surtout au niveau des virages : en visant l'arrière du robot prédécesseur, le robot coupe les virages et dévie du chemin emprunté par son prédécesseur. Pour améliorer la précision du suivi, les auteurs proposent d'autres lois de contrôle plus complexes synthétisées à partir de polynômes d'ordre 3 et 4. Ils proposent ensuite une autre méthode qui consiste à mémoriser le chemin du prédécesseur pour réduire l'écart latéral entre les chemins du leader et des suiveurs.

## **2.2. Commande basée sur la linéarisation exacte**

La technique de linéarisation exacte utilise une transformation exacte dans le but d'écrire un système non linéaire sous forme d'un système linéaire, de façon à pouvoir concevoir des lois de commande en exploitant les méthodes de l'automatique linéaire. Plusieurs techniques de commande, parmi lesquelles la linéarisation exacte, dont la plus célèbre est une approche géométrique par retour d'état ont été présentées dans [2].

Le problème de suivi de trajectoire (ligne droite) d'un convoi de robot peut être formulé comme un problème d'optimisation sous contraintes [2]. Le modèle dynamique du mouvement longitudinal du véhicule est exprimé sous forme de deux équations :

- une première équation représente la dynamique du moteur du véhicule ;
- une deuxième équation représente le mouvement du véhicule exprimée par la deuxième loi de Newton.

Certains auteurs ont linéarisé le comportement dynamique du robot en appliquant des méthodes de linéarisation exacte et ont formalisé le problème de suivi de trajectoire sous forme d'un problème d'optimisation [6]. Ils proposent par la suite un contrôleur dont les constantes sont calculées de façon à stabiliser les fonctions de transfert des véhicules. En testant leur approche de contrôle, les auteurs ont constaté que l'inter-distance entre deux véhicules consécutifs augmente le long du convoi.

Les approches de linéarisation exacte présentent quelques inconvénients : d'une part, certaines problématiques comme la robustesse et l'atténuation de la perturbation ne peuvent pas être abordées ; d'autre part, tous les systèmes ne peuvent pas être exactement linéarisés (en suivant cette approche) tout en maintenant leur stabilité [6]. Les travaux effectués dans le cadre de la robotique mobile révèlent que le modèle cinématique d'un robot mobile ne peut pas être linéarisé d'une manière exacte [2]. Mais il est possible de le convertir en systèmes chaînés où le contrôle longitudinal et latéral seront découplés et conçus de façon indépendante.

### **2.3 Commande basée sur la théorie du contrôle optimal**

La théorie du contrôle optimal consiste à calculer la commande d'un système soumis à des contraintes dans le but d'optimiser un critère de performance [2]. Ce critère de performance est une fonction d'un coût qui dépend de l'état du système et des variables de contrôle.

Dans [7], La commande d'une chaîne de véhicules est abordée sous forme d'un problème d'optimisation. Sachant que le convoi se déplace à grande vitesse, les auteurs désirent concevoir un contrôleur longitudinal optimal afin de contrôler la position et la vitesse de chaque véhicule du convoi. Pour cela, ils expriment les équations dynamiques de mouvement en fonction des forces agissant sur le robot et définissent l'expression des erreurs sur la position, la vitesse et l'accélération (ou la force appliquée).

En supposant que l'erreur sur la vitesse est faible, les auteurs linéarisent le système et définissent la dynamique des erreurs de position et de vitesse. Ensuite, ils définissent une fonction coût quadratique  $J$  basée sur les erreurs de position, de vitesse et d'accélération (ou de force étant donné que force = masse\*accélération).  $J$  est alors la somme pondérée de ces trois erreurs, les coefficients de pondération sont choisis plus ou moins arbitrairement (de l'aveu même des auteurs) de façon à donner plus de poids à une erreur qu'à une autre. Étant donné la dynamique des erreurs ainsi que la fonction d'optimisation  $J$ , les auteurs calculent un vecteur de commande du convoi qui est alors l'ensemble des forces à appliquer sur les différents véhicules de façon à minimiser  $J$ .

### **3. Commande basée sur le modèle cinématique du robot.**

Cette loi de commande pour le suivi de trajectoires a d'abord été proposée dans [8]. La stabilité du contrôleur a été prouvée par l'utilisation d'une fonction de Lyapunov à condition que la vitesse de référence ne s'annule jamais. Les entrées du contrôleur sont la posture du véhicule et les vitesses de référence, tandis que les sorties sont la vitesse linéaire et la vitesse de rotation du robot mobile. La loi de contrôle proposée dans ce travail est basée sur le modèle cinématique des véhicules et ne tient pas compte des effets de la dynamique du robot. Ce contrôleur est indépendant du modèle dynamique du robot et peut être appliqué à n'importe quel type de robots mobiles.

Les paramètres appropriés du contrôleur ont été déterminés en linéarisant l'équation différentielle du système autour d'un point d'équilibre et en cherchant les conditions qui produisent un amortissement critique. Pour calculer les entrées de contrôle du véhicule, on suppose qu'il existe un suivi de vitesse parfait. Cette approche présente plusieurs problèmes:

Tout d'abord, le suivi de vitesse parfait n'existe pas dans la réalité. Deuxièmement, les perturbations sont ignorées. Troisièmement, une connaissance complète de la dynamique est nécessaire et de plus la linéarisation du modèle s'est faite autour d'un point d'équilibre. Afin d'améliorer les performances de cet algorithme de commande proposé, d'autres contrôleurs qui incluent la dynamique du véhicule et qui peuvent gérer les perturbations sont proposés.

### **4. Commande basée sur le Backstepping**

Le travail présenté dans [9] permet l'intégration d'un contrôleur cinématique et d'un contrôleur de couple pour des robots mobiles non holonomes. Une loi combinée cinématique / contrôle de couple est développée en utilisant le Backstepping et la stabilité asymptotique est garantie par la théorie de Lyapunov. De plus, cet algorithme de contrôle peut être appliqué aux trois problèmes de navigation de base: le suivi de chemin, le suivi de trajectoire et la stabilisation de configuration fixe.

Une structure générale permettant de contrôler les vitesses (vitesse linéaire et vitesse angulaire) d'un robot mobile peut prendre en charge différentes techniques de commande allant d'un contrôleur conventionnel à couple pré-calculé, lorsque toutes les dynamiques sont connues, à des contrôleurs adaptatifs.

Cet algorithme de contrôle rigoureux prend en compte la dynamique spécifique du véhicule pour convertir la commande du système de direction en entrée de commande pour le véhicule réel. Tout d'abord, les entrées du contrôleur de la vitesse sont conçues pour le système de direction cinématique pour rendre l'erreur de position asymptotiquement stable. Ensuite, un contrôleur de couple calculé est conçu de telle sorte que les vitesses du robot mobile convergent vers les vitesses désirées.

La méthode est valable tant que les vitesses du contrôleur de vitesse sont lisses et bornées et que la dynamique du robot réel est complètement connue. En fait, la parfaite connaissance des paramètres du robot mobile est inaccessible. Par exemple, la friction est très difficile à modéliser dans ces systèmes. Pour faire face à ce problème, un contrôleur adaptatif robuste devrait être conçu de manière à pouvoir gérer les incertitudes et les perturbations inconnues non modélisées.

Les travaux menés dans [10] sur l'élaboration d'un contrôleur de suivi de trajectoire sont basés sur le Backstepping. Des tests ont été faits sur le modèle cinématique d'un robot mobile (PowerBot) afin de valider le contrôleur proposé.

Tout comme dans [10], les travaux menés dans [11] sont basés sur le Backstepping. Le robot mobile sur lequel ont été faits les tests est un robot mobile à entraînement différentiel. Les applications faites sur les modèles cinématique et dynamique prouvent que le contrôleur conçu sur la base du Backstepping est stable et performant.

Des méthodes de contrôle robustes telles que la commande par mode glissant et les commandes adaptatives et intelligentes, telles que la logique floue et la commande par réseau de neurones sont des solutions possibles au problème de la commande de robots mobiles.

## 5. Commande basée sur le mode glissant

La commande à structure variable (commande par mode glissant) est une commande robuste. Des travaux sur la technique de la commande par mode glissant pour les robots mobiles non holonomes ont été effectués dans [12], [13] et [14]. Cette loi de contrôle a pour principe de contraindre l'état du système à atteindre en un temps fini une hypersurface (surface de glissement) et à y rester.

Compte tenu des caractéristiques intrinsèques des robots mobiles telles que la dynamique du véhicule, les limites d'inertie et de puissance des actionneurs et les erreurs de localisation, leurs équations dynamiques ne peuvent pas être décrites comme un modèle mathématique simplifié. Les avantages que présente ce contrôleur sont: la rapidité, une bonne réponse transitoire et la robustesse en ce qui concerne l'incertitude des paramètres.

Le modèle dynamique d'un robot mobile permet de décrire son comportement avec des perturbations bornées. La dynamique des erreurs du robot mobile est linéarisée au moyen d'une méthode de couple précalculé et la loi de contrôle par mode glissant est appliquée pour stabiliser le robot sur une trajectoire de référence et compenser les perturbations existantes.

Le schéma de contrôle que propose [15] utilise la méthode du couple précalculé pour la linéarisation par rétroaction de l'équation dynamique et la technique de mode glissant pour le contrôle robuste. Ce schéma de contrôle proposé a la capacité de résoudre le problème de suivi de trajectoire basé sur la modélisation dynamique lorsque la trajectoire de référence n'est pas fermée. Il est démontré qu'en appliquant la commande par mode glissant, le comportement du contrôleur du robot mobile est robuste par rapport aux erreurs d'état initiales et les perturbations externes telles que les erreurs d'intégration, le bruit dans le signal de commande et les erreurs de localisation [16].

Le principal problème de ce contrôleur est qu'il nécessite la connaissance parfaite du modèle dynamique du robot afin de pouvoir calculer le couple. Lorsque nous voulons effectuer la linéarisation par retour d'état du modèle dynamique non-linéaire du système, nous devons connaître la dynamique exacte du robot. Cet inconvénient nous amène à utiliser un contrôleur adaptatif ou intelligent avec capacité d'apprentissage.

Tant de méthodes différentes de contrôle adaptatif et intelligent peuvent être utilisées pour résoudre ce problème.

## **6. Commande basée sur la fonction de Lyapunov**

La loi de commande synthétisée est basée sur la théorie de stabilité de Lyapunov [2]. La synthèse de lois de commande à partir de fonctions de Lyapunov s'appuie sur des outils mathématiques relativement simples, réclame en général peu de calcul, mais en contrepartie requiert de l'intuition et de l'expérience pour choisir une fonction de Lyapunov qui peut conduire à une loi de commande pertinente.

Dans [2], une loi de commande est synthétisée en s'appuyant sur des fonctions de Lyapunov dans le but de faire converger un robot vers un chemin ( $\zeta$ ). Deux types de robots sont considérés pour la synthèse du contrôleur : un robot unicycle contrôlé par sa vitesse angulaire, et un robot à deux roues (avant et arrière) directionnelles contrôlé par l'angle de braquage de sa roue avant et la distance entre le centre de la roue avant et le centre de rotation instantané du robot. Pour contrôler un robot unicycle, les auteurs choisissent une fonction de Lyapunov définie positive basée sur l'écart latéral et l'erreur angulaire et obtiennent l'expression de la commande en dérivant cette fonction. Dans le cas d'un robot à deux roues directionnelles, deux fonctions de Lyapunov sont choisies afin d'obtenir les commandes permettant de réduire les erreurs latérale et angulaire. La convergence des erreurs latérale et angulaire n'est garantie que si certaines contraintes sur l'écart latéral initial du robot sont satisfaites.

## **7. Commande adaptative**

Les méthodes de commande adaptatives pour le suivi des robots mobiles à roues ont été proposées dans [15], [17], [18] et [19].

Dans [26], l'auteur propose un contrôleur dynamique pour le suivi de trajectoire d'un robot mobile à roues. La commande est basée sur le mode glissant adaptatif.

Tout d'abord, un contrôleur cinématique basé sur la technique de Backstepping est introduit pour faire suivre au robot mobile une trajectoire de référence. Ensuite, un contrôleur dynamique adaptatif basé sur le mode glissant (ASMDC) est proposé pour que la vitesse réelle du robot atteigne la commande de vitesse même en présence d'incertitudes et de perturbations. La théorie de Lyapunov a permis d'analyser la stabilité et la convergence du système en boucle fermée.

Une loi de commande adaptative et robuste est proposée dans [17]. Dans cette loi de commande, les incertitudes paramétriques sont estimées par le contrôleur adaptatif, tandis que les incertitudes non paramétriques sont compensées par le contrôleur robuste. La distinction entre les différentes incertitudes améliore efficacement le système. De plus, la performance en régime transitoire du contrôleur adaptatif est optimisée par le contrôleur robuste et les mesures des incertitudes sont évitées, ce qui renforce l'applicabilité du contrôleur. La théorie de Lyapunov permet de montrer que le système de contrôle en boucle fermée est uniformément stable.

Un contrôleur adaptatif qui permet d'assurer le suivi de trajectoire d'un robot mobile autonome est utilisé dans [18]. Un contrôleur cinématique permet de générer les vitesses linéaires et angulaires de référence. Ces dernières associées aux vitesses du modèle dynamique permettent d'élaborer une loi d'adaptation des paramètres du robot. Cette boucle, étant mise à jour à tout instant, permet de réduire considérablement les erreurs et d'augmenter la performance du contrôleur. La théorie de Lyapunov permet d'analyser la stabilité du système.

Un contrôleur robuste et adaptatif est élaboré dans [19]. Tout d'abord, le suivi de trajectoire du robot mobile est converti en un problème de stabilisation d'un système à double intégrale. Ensuite une loi de contrôle est utilisée pour concevoir un contrôleur de suivi. Par après, un observateur de perturbation et un compensateur adaptatif sont conçus pour fonctionner avec le contrôleur cinématique de suivi afin de traiter les incertitudes du robot. Enfin, une loi adaptative de commutation est conçue pour atténuer l'effet de commutation dans le compensateur adaptatif. En conséquence, le système de commande donne la limite ultime de l'erreur de poursuite et du gain adaptatif.



## 8. Commande basée sur les réseaux de neurones

D'après la littérature, les réseaux de neurones ont été utilisés dans des nombreuses applications telles que l'identification, la planification et la commande des robots. Les réseaux de neurones sont capables d'approximer les fonctions non linéaires avec une grande précision. Pour cela l'introduction d'un réseau de neurones dans la partie dynamique de la commande non linéaire peut résoudre les inconvénients concernant les perturbations et les dynamiques inconnues. Nous pouvons citer quelques exemples de systèmes de commandes basées sur l'utilisation de réseaux de neurones, pour le suivi de chemin ou de trajectoire.

Le but recherché dans ces travaux est de réduire la distance entre la configuration courante et la configuration de référence par apprentissage de la commande.

Dans l'approche développée dans [20], appelée rétro-propagation indirecte, un critère dépendant de l'erreur en position et en orientation a été défini. Le modèle cinématique du véhicule est utilisé pour calculer la dérivée de ce critère par rapport aux consignes. Ceci permet la réalisation d'un système de commande utilisant un réseau de neurones entraîné par l'algorithme de rétro-propagation à fournir les consignes minimisant le critère d'erreur.

Un modèle prédictif présenté dans [21] permet de traiter à la fois le problème du suivi de chemin et celui de l'évitement d'obstacle. Les auteurs utilisent un modèle analytique du véhicule et de ses capteurs pour prédire l'état du système lors des prochains pas de temps. Ils utilisent un algorithme d'optimisation numérique non linéaire hors-ligne, permettant de trouver les consignes maximisant un critère tenant compte à la fois de la proximité des obstacles et de la position du véhicule par rapport au chemin de référence.

Le contrôleur de suivi de trajectoire basé sur le réseau de neurones proposé dans [22] utilise la méthode d'apprentissage des propriétés du réseau de neurones pour élaborer un contrôleur adaptatif qui adapte le gain d'un contrôleur basé sur le Backstepping. Ce contrôleur a les propriétés de faire tendre l'erreur plus rapidement vers zéro. Cette approche de contrôle, qui intègre le Backstepping et les réseaux de neurones, améliore ainsi ses performances en utilisant la propriété d'apprentissage du réseau de neurones.

## **9. Méthodologie**

### **9.1. Cadre scientifique**

Le sujet de recherche basé sur la synthèse d'une loi de commande pour les robots mobile nécessite au préalable la connaissance des tâches que doit faire, le modèle du robot à commander, et les facteurs internes et externes influant sur le robot. Dans le but d'aboutir aux objectifs escomptés, deux approches ont été adoptées.

Premièrement l'approche analytique, nous permettra de développer et de modéliser le robot à partir des relations physiques connues.

Deuxièmement l'approche numérique, est celle dans laquelle les équations dynamiques seront simulées. L'environnement de travail considéré est Matlab/Simulink®.

Une troisième approche est envisageable : l'approche expérimentale qui nous permettra de valider les résultats de simulation.

## 9.2. Démarche

Afin de mener à bien ces travaux de recherches, un organigramme des différentes démarches est présenté ci-dessous.

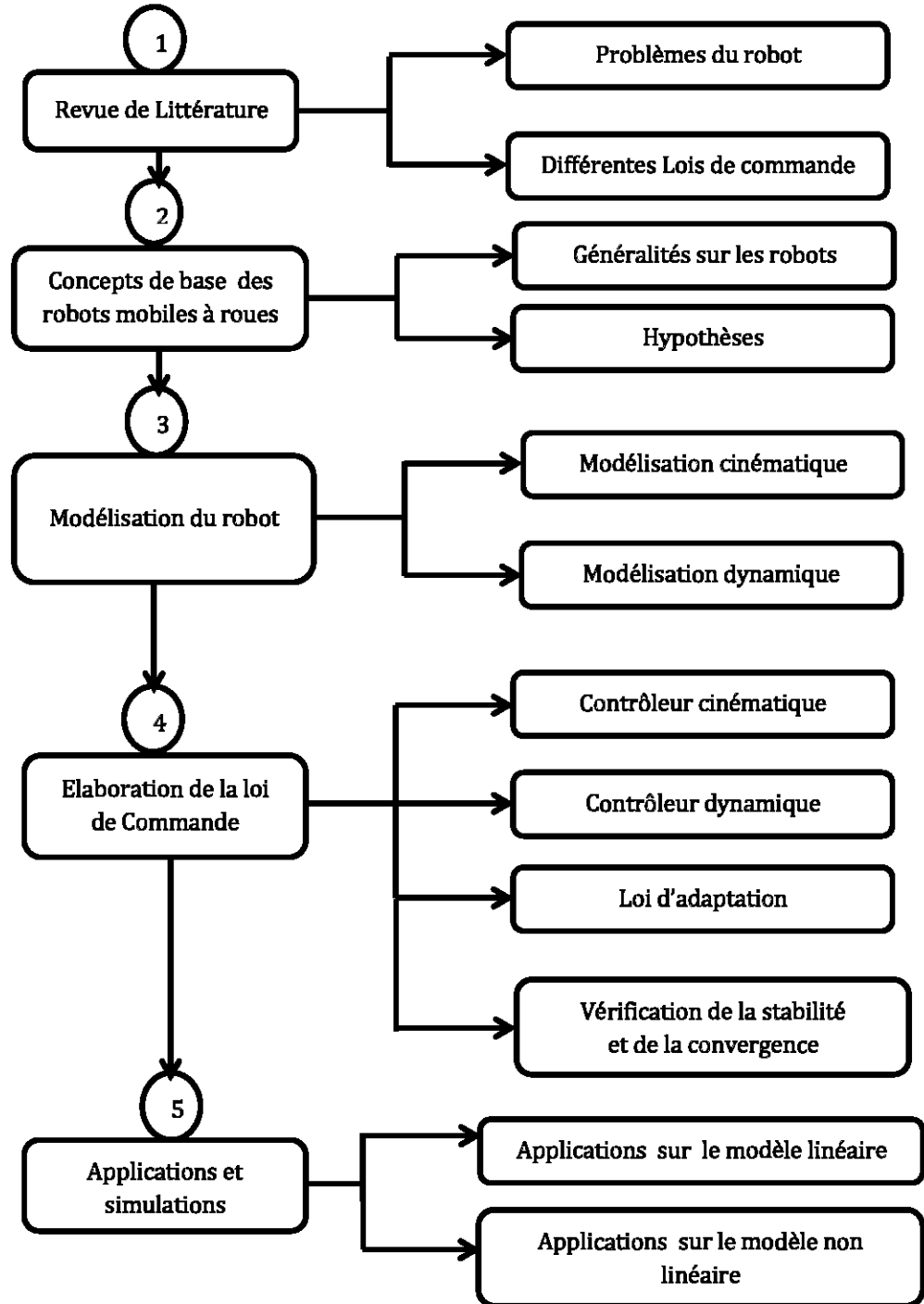


Figure 2: Organigramme des travaux

## **CHAPITRE 2 : ROBOTS MOBILES A ROUES ET MODELISATION**

### **Introduction.**

#### **1. Généralités sur les robots mobiles**

- 1.1. Classification des robots
- 1.2. Types des robots mobiles à roues
- 1.3. Eléments constitutifs d'un robot

#### **2. Modélisation**

- 2.1. Présentation du robot mobile
- 2.2. Modélisation Cinématique
- 2.3. Modélisation dynamique

### **Conclusion.**

## **Introduction**

L'une des premières étapes dans l'étude des robots consiste à définir la classe du robot selon les différentes actions à mener, le type de robot, ainsi que les différents éléments qui le constituent. Une fois ceci fait, il sera possible de développer des algorithmes permettant de le commander. Dans une première partie de ce chapitre, nous présenterons les différentes classes des robots définis d'après la JIRA (Japanese Industrial Robot Association) ensuite des différents blocs (les capteurs, l'unité de calculs et les actionneurs) le constituant. En deuxième partie, les notions telles que l'holonomie et la non-holonomie ainsi que les équations cinématiques et dynamiques du robot mobile de type unicycle seront présentées.

### **1. Généralités sur les robots mobiles**

#### **1.1. Classification des robots**

En effet, une classification, c'est-à-dire un groupement en sous-ensembles homogènes, s'effectue à partir de conditions satisfaites pour certains sous-ensembles et non par d'autres. Ces conditions peuvent impliquer des propriétés, des critères, des paramètres, des grandeurs quantitatives ou qualitatives. La question de base concerne l'origine des éléments permettant d'établir les conditions d'affectation de tel robot dans telle classe. On peut aussi formuler cela avec la question suivante : « À quelle(s) chose(s) attachons-nous le plus d'importance dans l'utilisation d'un robot ? » Compte tenu de la complexité de cette machine et de la variété de ses applications, de nombreux choix peuvent s'offrir (en particulier, ceux concernant l'efficacité, la vitesse de précision ou bien l'habileté, le dimensionnement).

Compte tenu de cette complexité de la classification, les spécialistes en robotique appartenant à des associations de robotique industrielles telles que la JIRA, la RIA (Robotics Institute of America) et l'AFRI (Association Française de Robotique Industrielle) se sont regroupés pour établir une classification des robots [23]. D'après ces travaux, les robots peuvent être classés suivants plusieurs critères à savoir :

- Le positionnement du robot
- Les applications du robot
- La locomotion et la cinématique du robot
- L'architecture du robot
- La génération du robot
- L'envergure du robot
- Le type du contrôleur intervenant dans le robot
- Les différents types de capteurs utilisés dans le robot
- La conception du robot.

D'après la JIRA, il existe six classes de robots à savoir :

- Les télémanipulateurs qui sont des bras commandés directement par un opérateur humain.
- Les manipulateurs avec séquence fixe qui admettent un contrôle automatique, mais difficile à reprogrammer.
- Les manipulateurs avec séquence variables qui ont un contrôle automatique et qui sont reprogrammés mécaniquement, c'est l'exemple de « Pick and Place Manipulators » ou robot « tout ou rien ».
- Les robots Play Back qui exécutent des séquences sous la supervision d'êtres humains, les mémorisent pour les rejouer (Play Back).
- Les robots à un contrôleur numérique où les positions des séquences sont contrôlées par des données numériques.
- Les robots intelligents qui peuvent réagir dans leur environnement et à des modifications arrivant durant l'exécution.

Quant à la RIA, elle ne considère pas les classes 1 et 2 comme étant des robots présentés par la JIRA.

## **1.2. Types des robots mobiles à roues**

Dans le cadre de notre étude, nous nous intéresserons aux robots mobiles à roues de type unicycle. D'après [23], les robots mobiles peuvent être classés suivant la locomotion et la cinématique du robot.

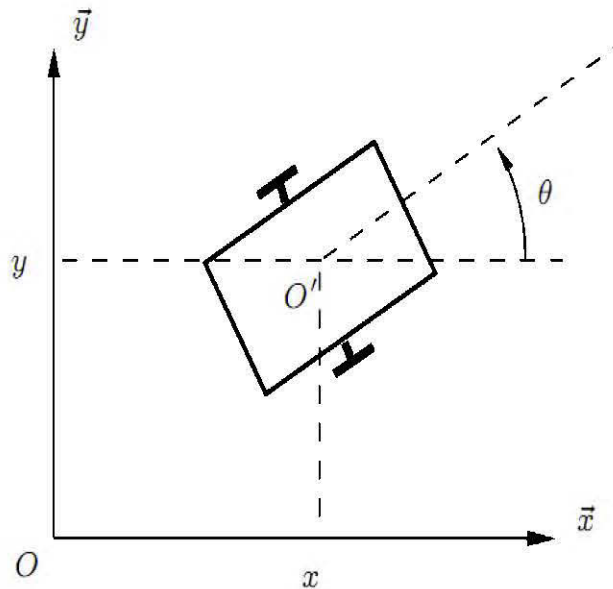
On distingue plusieurs types de robots mobiles à roues, classés principalement par la position et le nombre de roues utilisées. Nous citerons les quatre types de robots à roues couramment rencontrés.

### 1.2.1. Robot unicycle

Un robot de type unicycle est actionné par deux roues indépendantes. Il possède éventuellement des roues folles (libres) pour assurer sa stabilité mécanique. Son centre de rotation est situé sur l'axe reliant les deux roues motrices.

En effet il est impossible de le déplacer dans une direction perpendiculaire aux roues de locomotion : c'est un robot non-holonyme.

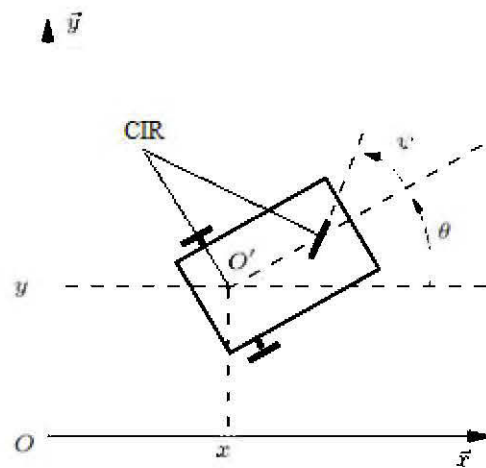
Il se déplace aisément d'un point à un autre par une suite de rotations simples et de lignes droites. La figure 3 représente un robot mobile à roue de type unicycle.



*Figure 3: Robot mobile de type unicycle [24].*

### 1.2.2. Robot de type tricycle

Un robot de type tricycle est constitué de deux roues fixes placées sur un même axe et d'une roue centrée orientable placée sur l'axe longitudinal (Fig. 4). Le mouvement du robot est donné par la vitesse des deux roues fixes et par l'orientation de la roue orientable. Son centre de rotation est situé à l'intersection de l'axe contenant les roues fixes et de l'axe de la roue orientable. Il est impossible de le déplacer dans une direction perpendiculaire aux roues de locomotion.

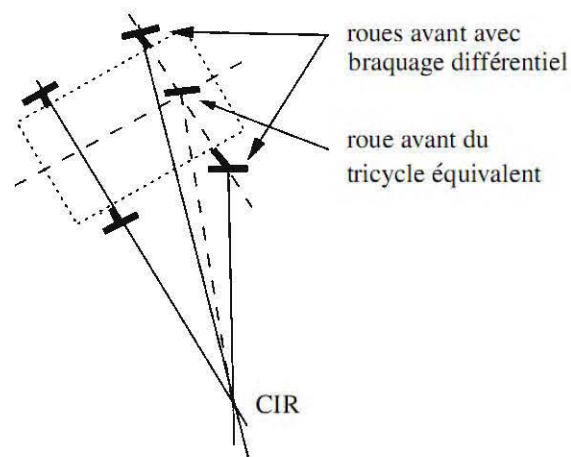


*Figure 4: Robot mobile de type tricycle [24].*

### 1.2.3. Robot de type voiture

Un robot de type voiture est semblable au tricycle. Il est constitué de deux roues fixes placées sur un même axe et de deux roues centrées orientables placées elles aussi sur un même axe (Fig. 5). Le robot de type voiture est cependant plus stable puisqu'il possède un point d'appui supplémentaire. Toutes les autres propriétés du robot voiture sont identiques au robot tricycle, le premier pouvant être ramené au deuxième en remplaçant les deux roues avant par une seule placée au centre de l'axe, et ceci de manière à laisser le centre de rotation inchangé.

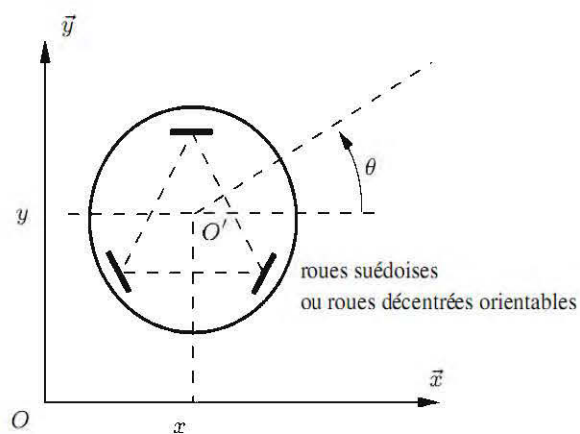




**Figure 5:** Robot mobile de type voiture [24]

#### 1.2.4. Robot omnidirectionnel

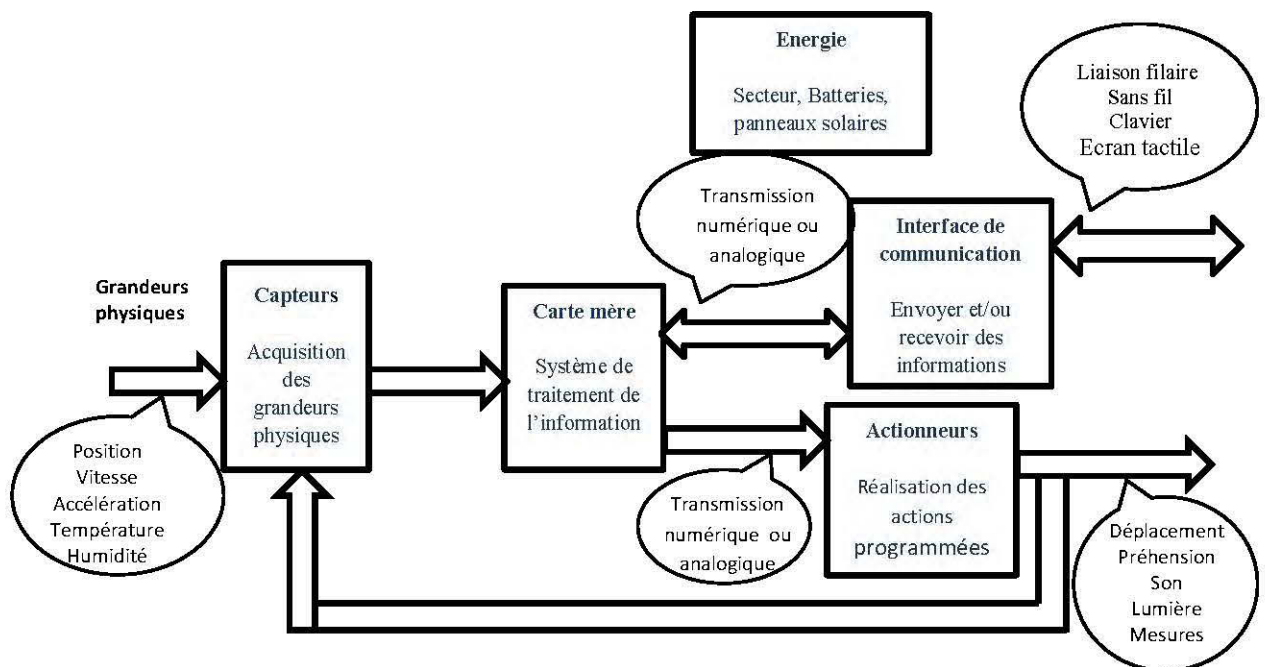
Un robot omnidirectionnel est un robot qui peut se déplacer librement dans toutes les directions. Il est en général constitué de trois roues décentrées orientables placées en triangle équilatéral.



**Figure 6:** Robot mobile de type omnidirectionnel [2]

### 1.3. Eléments constitutifs d'un robot

En général, un robot est un assemblage complexe de pièces mécaniques et de pièces électroniques. Les robots mobiles possédant une source d'énergie embarquée (batterie d'accumulateurs électriques) sont dit autonomes. Le plus souvent les pièces mécaniques et électroniques sont agencées de la manière suivante :



*Figure 7: Schéma d'illustration des éléments constituant d'un robot*

#### 1.3.1. Les Capteurs

##### Capteurs ou organes de perception

Un capteur est un organe de prélèvement d'information qui élabore à partir d'une grandeur physique, une autre grandeur physique de nature différente (très souvent électrique). Cette grandeur représentative de la grandeur prélevée est utilisable à des fins de mesure ou de commande.

On distingue entre deux types de capteurs :

- **Les capteurs proprioceptifs** : qui fournissent l'information sur la configuration du manipulateur tel que la position, la vitesse, l'accélération, pour assurer au robot manipulateur le contrôle de sa structure mécanique articulée ; ils interviennent dans les boucles de régulation afin de permettre à l'unité de commande de prendre la décision adéquate.

Comme exemple, l'**odomètre** qui permet d'estimer le déplacement de la plateforme à partir de la mesure de rotation des roues (ou du déplacement des pattes). La mesure de rotation est en général effectuée par un codeur optique disposé sur l'axe de la roue, ou sur le système de transmission (par exemple sur la sortie de la boîte de vitesse pour une voiture).

On a aussi le **télémètre**, qui permet de mesurer la distance aux éléments de l'environnement, utilisant divers principes physiques.

- **Les capteurs extéroceptifs** : qui interviennent lorsque l'espace de travail est mal connu, afin de donner les informations sur l'environnement extérieur du robot comme la température, l'image etc. Ils permettent de modifier le comportement du robot pour s'adapter aux contraintes imposées.

### 1.3.2. Les Actionneurs

Les actionneurs sont des organes qui transforment l'énergie qui leur est fournie en un phénomène physique utilisable comme des mouvements. Si on se limite aux actionneurs pratiquement utilisables, il est possible de les classer suivant :

- **Le type du mouvement généré** : Dans l'état actuel de la technologie, on trouve les actionneurs linéaires qui développent une force et génèrent un mouvement de translation parallèlement à cette force, et les actionneurs rotatifs qui développent un couple et génèrent un mouvement de rotation autour de l'axe du couple. Comme exemple, les moteurs électriques rotatifs sont fréquemment associés à des réducteurs mécaniques à engrenages.

– **La nature de la source d'énergie** : On dispose d'actionneurs pneumatiques qui utilisent l'air comprimé comme source d'énergie, d'actionneurs hydrauliques sous pression, et d'actionneurs électriques qui utilisent l'énergie électrique. La puissance massique et le pouvoir d'accélération sont des critères importants qui permettent une comparaison objective de ces différents types d'actionneurs. Comme exemple, les vérins hydrauliques, reliés par une tuyauterie à des pompes, fournissent des pressions élevées.

#### **1.3.4. L'Unité de traitement**

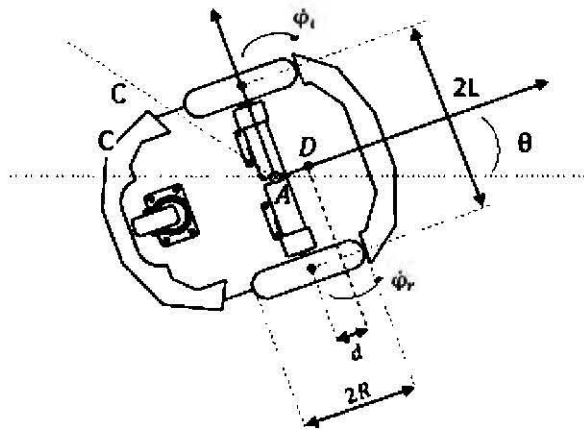
Plus connue sous le nom de carte mère, il gère l'ensemble des tâches. Il admet trois rôles essentiels :

- le rôle de l'information, qui consiste à collecter l'information venant des capteurs.
- le rôle de la décision : en partant d'une tâche définie et en tenant compte des données du système et de l'environnement, il établit les actions adéquates.
- le rôle de la communication.

### **2. Modélisation**

#### **2.1. Présentation du robot mobile**

La modélisation mathématique est une étape très importante pour la commande des robots. Deux types de modèles sont généralement utilisés lors de la commande, à savoir : le modèle cinématique et le modèle dynamique. D'après la littérature, on rencontre plusieurs types de robots à savoir : les robots de type unicycle, les robots de type tricycle, et les robots de type voiture. Dans le cadre de notre travail, nous utiliserons un robot de type unicycle à cause de sa simplicité de construction et de ses propriétés cinématiques intéressantes. Plusieurs robots ont fait l'objet d'étude de certains chercheurs, mais un a retenu leur attention : le robot mobile de type unicycle.



*Figure 8: Schéma d'un robot mobile de type unicycle [2]*



*Figure 9: Image du robot PIONEER 3DX*

Les figures 8 et 9 représentent des robots de type unicycle. On désigne par robot mobile de type unicycle, un robot actionné par deux roues indépendantes et possédant éventuellement un certain nombre de roues folles assurant son équilibre. Le robot de la figure 8 possède une roue folle.

## 2.2. Modélisation Cinématique

Dans l'étude de la cinématique, seules les vitesses sont prises en compte. Le mouvement d'un robot mobile à conduite différentielle est caractérisé par deux contraintes cinématiques à savoir :

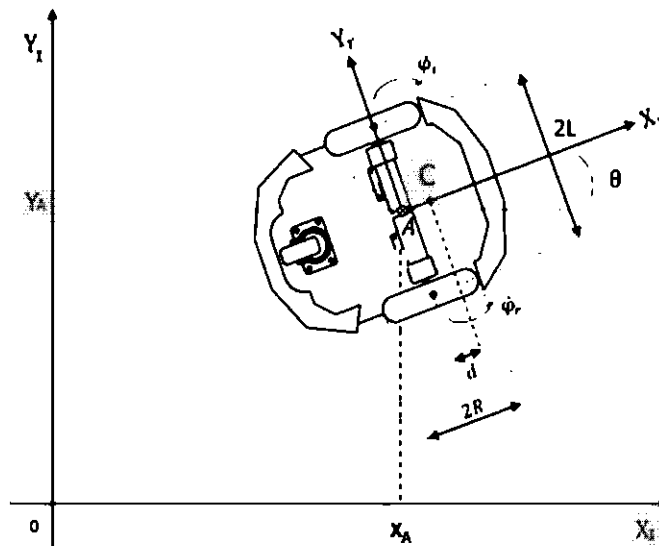
- Aucun glissement latéral,
- Roulement sans glissement.

### 2.2.1. Systèmes de coordonnées.

Notons  $\{X_I, Y_I\}$  un repère fixe quelconque et  $\{X_r, Y_r\}$  un repère mobile lié au robot. Soient  $q^I = [x^I, y^I, \theta^I]^T$  un point du repère  $\{X_I, Y_I\}$  et  $q^r = [x^r, y^r, \theta^r]^T$  un point du repère  $\{X_r, Y_r\}$ .

Les points  $q^I$  et  $q^r$  sont liés par la matrice orthogonale  $R(\theta)$ .

$$q^I = R(\theta)q^r \text{ avec } R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$



*Figure 10: Robot mobile dans le repère fixe*

La figure 10 présente le robot mobile de type unicycle dans les repères fixe et mobile.

$A$  : est le point milieu de l'axe des roues.

$2R$  : représente le diamètre de la roue du robot ;

$2L$  : représente la largeur du robot ;

$\dot{\phi}_r$  et  $\dot{\phi}_l$  : représentent respectivement la vitesse de rotation de la roue droite et de la roue gauche ;

$\theta$  : est l'angle d'orientation du robot ;

$d$  : est la distance entre le point  $A$  et le point  $C$ .

### 2.2.2. Les contraintes cinématiques

Le mouvement du robot est caractérisé par deux contraintes non-holonomes qui sont obtenues par deux hypothèses [25]. Une contrainte non holonome est une contrainte non intégrable faisant intervenir la dérivée par rapport au temps des coordonnées du robot. Si le robot peut instantanément se déplacer en avant ou en arrière mais il ne peut pas se déplacer à droite et à gauche sans que les roues glissent, on dit qu'il possède une contrainte non holonome à savoir :

- Aucun glissement latéral ;
- Roulement sans glissement.

Par contre si chaque roue est capable de se déplacer en avant et de côté, on dit qu'il s'agit d'un comportement holonome du robot.

### 2.2.3. Hypothèse 1.

**Aucun glissement latéral:** Cette contrainte signifie simplement que le robot peut se déplacer uniquement en avant et en arrière, mais pas latéralement. Cela signifie que la vitesse du robot associée au point  $A$  est nulle le long de l'axe latéral dans le repère mobile, soit  $\dot{y}_A^r = 0$ .

En utilisant la matrice de rotation  $R(\theta)$ , l'expression de la vitesse du robot associée au point  $A$  dans le repère fixe est :

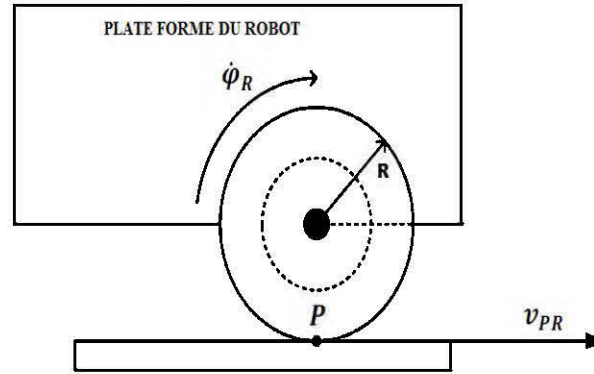
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_A^I \\ \dot{y}_A^I \\ \dot{\theta}_A^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_A^r \\ 0 \\ \dot{\theta}_A^r \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_A^I = \dot{x}_A^r \cdot \cos\theta \\ \dot{y}_A^I = \dot{x}_A^r \cdot \sin\theta \end{cases}$$

Ainsi on obtient :

$$-\dot{x}_A^I \sin\theta + \dot{y}_A^I \cos\theta = 0 \quad (2.2)$$

#### 2.2.4. Hypothèse 2.

**Roulement sans glissement :** La contrainte de roulement sans glissement représente le fait que chaque roue maintient un point en contact avec le sol comme indiqué dans la figure 11. Les hypothèses 1 et 2 ont été développées dans [25].



*Figure 11: Caractérisation du roulement sans glissement*

Ainsi la vitesse linéaire de chaque roue du robot au point de contact  $P$  est donnée par :

$$\begin{cases} v_{PL} = R\dot{\phi}_L \\ v_{PR} = R\dot{\phi}_R \end{cases}$$

où  $v_{PL}$  est la vitesse linéaire de la roue gauche, et  $v_{PR}$  est la vitesse linéaire de la roue droite.

#### 2.2.5. Modèle cinématique du robot mobile unicycle

Les expressions des positions généralisées et des vitesses généralisées dans le repère fixe en fonction des coordonnées du point A sont données par :



$$\text{Roue droite} \begin{cases} x_{PR}^I = x_A^I + L \sin \theta \\ y_{PR}^I = y_A^I - L \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{PR}^I = \dot{x}_A^I + L \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y}_{PR}^I = \dot{y}_A^I + L \dot{\theta} \sin \theta \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\text{Roue gauche} \begin{cases} x_{PL}^I = x_A^I - L \sin \theta \\ y_{PL}^I = y_A^I + L \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{PL}^I = \dot{x}_A^I - L \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y}_{PL}^I = \dot{y}_A^I - L \dot{\theta} \sin \theta \end{cases} \quad (2.4)$$

En utilisant la matrice de rotation  $R(\theta)$  et en l'appliquant à la roue droite on a :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{PR}^I \\ \dot{y}_{PR}^I \\ \theta^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_{PR}^r \\ \dot{y}_{PR}^r \\ \theta^r \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

avec  $\dot{y}_{PR}^r = 0$  signifie que la vitesse au point P de la roue droite est nulle (car aucun glissement latéral). Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{PR}^I \\ \dot{y}_{PR}^I \\ \theta^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{PR}^r \cos \theta \\ \dot{x}_{PR}^r \sin \theta \\ \theta^r \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$\text{Or } \vec{v}_{PR}^r = \dot{x}_{PR}^r \vec{i}^r + \dot{y}_{PR}^r \vec{j}^r = R \dot{\phi}_R \vec{i}^r \Rightarrow v_{PR}^r = \dot{x}_{PR}^r = R \dot{\phi}_R$$

L'équation (2.6) dévient :

$$\begin{cases} \dot{x}_{PR}^I \cos \theta = \dot{x}_{PR}^r \cos^2 \theta & (a) \\ \dot{y}_{PR}^I \sin \theta = \dot{x}_{PR}^r \sin^2 \theta & (b) \end{cases}$$

En sommant (a) et (b), on obtient :

$$\dot{x}_{PR}^I \cos \theta + \dot{y}_{PR}^I \sin \theta = R \dot{\phi}_R \quad (2.7)$$

De même pour la roue gauche.

$$\dot{x}_{PL}^I \cos \theta + \dot{y}_{PL}^I \sin \theta = R \dot{\phi}_L$$

On peut former le système d'équation des deux roues

$$\begin{cases} \dot{x}_{PR}^I \cos \theta + \dot{y}_{PR}^I \sin \theta = R \dot{\phi}_R \\ \dot{x}_{PL}^I \cos \theta + \dot{y}_{PL}^I \sin \theta = R \dot{\phi}_L \end{cases} \quad (2.8)$$

En introduisant les équations (2.3) et (2.4) dans (2.8) on obtient :

$$\begin{cases} (\dot{x}_A^I + L \dot{\theta} \cos \theta) \cos \theta + (\dot{y}_A^I + L \dot{\theta} \sin \theta) \sin \theta = R \dot{\phi}_R \\ (\dot{x}_A^I - L \dot{\theta} \cos \theta) \cos \theta + (\dot{y}_A^I - L \dot{\theta} \sin \theta) \sin \theta = R \dot{\phi}_L \end{cases}$$

Les hypothèses 1 et 2 et les équations précédentes produisent les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} -\dot{x}_A^I \sin \theta + \dot{y}_A^I \cos \theta = 0 \\ \dot{x}_A^I \cos \theta + \dot{y}_A^I \sin \theta + L \dot{\theta} = R \dot{\phi}_R \\ \dot{x}_A^I \cos \theta + \dot{y}_A^I \sin \theta - L \dot{\theta} = R \dot{\phi}_L \end{cases} \quad (2.9)$$

De l'équation (2.9) on peut écrire :

$$A(q) \dot{q} = 0 \quad (2.10)$$

$A(q)$  est la matrice de contraintes non-holonomes donnée par :

$$A(q) = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & L & -R & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & -L & 0 & -R \end{pmatrix}$$

$\dot{q}$  représente la dérivé de la coordonnée généralisée  $q$ , donnée par :

$$\dot{q} = [\dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{\theta}, \dot{\phi}_R, \dot{\phi}_L]^T.$$

L'équation (2.9) nous permet d'obtenir l'expression des vitesses linéaires des roues droite et gauche au point de contact P.

$$\begin{cases} v_{PR} = v_A + L\dot{\theta} \\ v_{PL} = v_A - L\dot{\theta} \end{cases}$$

avec  $v_A$  la vitesse du point A,  $v_{PR}$  est la vitesse de la roue droite au point P et  $v_{PL}$  est la vitesse de la roue gauche au point P.

En posant :

$$\begin{cases} v = v_A \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_{PR} = v_R \\ v_{PL} = v_L \end{cases} \quad (2.11)$$

on obtient l'expression de la vitesse linéaire  $v$  et la vitesse angulaire  $\omega$  du robot mobile en fonction des vitesses de rotation de la roue gauche  $\dot{\phi}_L$  et de la roue droite  $\dot{\phi}_R$ .

$$\begin{cases} v = \frac{(v_R + v_L)}{2} = \frac{R(\dot{\phi}_R + \dot{\phi}_L)}{2} \\ \omega = \frac{(v_R - v_L)}{2L} = \frac{R(\dot{\phi}_R - \dot{\phi}_L)}{2L} \end{cases} \quad (2.12)$$

Dans le repère mobile les coordonnées du point A sont :

$$\begin{cases} \dot{x}_A^r = v = \frac{R(\dot{\phi}_R + \dot{\phi}_L)}{2} \\ \dot{y}_A^r = 0 \\ \dot{\theta}_A^r = \omega = \frac{R(\dot{\phi}_R - \dot{\phi}_L)}{2L} \end{cases} \quad (2.13)$$

En se servant de l'équation (2.1), on peut écrire

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_A^I \\ \dot{y}_A^I \\ \dot{\theta}_A^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_A^r \\ \dot{y}_A^r \\ \dot{\theta}_A^r \end{pmatrix} \quad (2.14a)$$

En remplaçant l'équation (2.13) dans (2.14), on obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_A^I \\ \dot{y}_A^I \\ \dot{\theta}_A^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{R(\dot{\phi}_R + \dot{\phi}_L)}{2} \\ 0 \\ \frac{R(\dot{\phi}_R - \dot{\phi}_L)}{2L} \end{pmatrix} \quad (2.14b)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_A^I \\ \dot{y}_A^I \\ \dot{\theta}_A^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R}{2} \cos \theta & \frac{R}{2} \cos \theta \\ \frac{R}{2} \sin \theta & \frac{R}{2} \sin \theta \\ \frac{R}{2L} & -\frac{R}{2L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_R \\ \dot{\varphi}_L \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

En combinant les équations (2.12) et (2.15), soit encore à partir de l'équation (2.14b), on obtient le modèle cinématique du robot mobile unicycle :

$$\dot{q}_A^I = \begin{pmatrix} \dot{x}_A^I \\ \dot{y}_A^I \\ \dot{\theta}_A^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

### 2.3. Modélisation dynamique

Le modèle dynamique est nécessaire pour la simulation, l'analyse du mouvement du robot et la conception des variétés d'algorithmes de commande. Plusieurs formalismes tels que : le formalisme d'Euler-Lagrange, le formalisme de Newton-Euler et le principe de D'Alembert permettent de faire la modélisation dynamique du robot. Dans notre cas, on s'intéressera uniquement au formalisme d'Euler-Lagrange.

Considérons un robot non-holonyme avec  $n$  coordonnées généralisées  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  et soumis à  $m$  contraintes.

Le formalisme d'Euler-Lagrange est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = F + A^T(q) \cdot \lambda_k \quad (2.17)$$

Avec  $L(q, \dot{q}) = T - V$  : le Lagrangien

$T$  : L'énergie cinétique du système ;

$V$  : L'énergie potentielle du système ;

$F$  : Le vecteur de force généralisée ;

$\lambda_k$  : Le vecteur des multiplicateurs de Lagrange ;

$q_i$  : la coordonnée généralisée et  $q = [x_A, y_A, \theta_A, \varphi_R, \varphi_L]^T$ , de dimension  $n = 5$ .

L'énergie cinétique  $T$  du système est donnée par :

$$T = T_C + T_{\omega R} + T_{\omega L} \quad (2.18)$$

où

$T_C$  est l'énergie cinétique de la plate forme ;

$$T_C = \frac{1}{2}m_c v_c^2 + \frac{1}{2}I_c \dot{\theta}^2 \quad (2.19)$$

$T_{\omega R}$  est l'énergie cinétique de la roue droite ;

$$T_{\omega R} = \frac{1}{2}m_\omega v_{\omega R}^2 + \frac{1}{2}I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_\omega \dot{\phi}_R^2 \quad (2.20)$$

$T_{\omega L}$  est l'énergie cinétique de la roue gauche.

$$T_{\omega L} = \frac{1}{2}m_\omega v_{\omega L}^2 + \frac{1}{2}I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_\omega \dot{\phi}_L^2 \quad (2.21)$$

avec

$m_c$  : masse de la plate-forme.

$m_\omega$  : masse de chaque roue plus la masse du moteur.

$v_{\omega R}$  : vitesse linéaire de la roue droite.

$v_{\omega L}$  : vitesse linéaire de la roue gauche.

$I_m$  : Moment d'inertie de chaque roue avec le moteur par rapport au diamètre de la roue.

$I_\omega$  : Moment d'inertie de chaque roue avec le moteur par rapport à l'axe de la roue.

$I_c$  : Moment d'inertie de la plate-forme du robot sans les roues, les moteurs, autour de l'axe vertical qui passe par le point  $C$ .

Le point  $C$  dans le repère fixe a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_c = x_A + d \cdot \cos\theta \\ y_c = y_A + d \cdot \sin\theta \end{cases} \quad (2.22)$$

L'énergie cinétique totale est donnée par :

$$T = \frac{1}{2}m(x_A^2 + y_A^2) - m_c \cdot d \cdot \dot{\theta}(\dot{y}_A \cos\theta - \dot{x}_A \sin\theta) + \frac{1}{2}I_\omega(\dot{\phi}_R^2 + \dot{\phi}_L^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (2.23)$$

$$\text{avec } \begin{cases} m = m_c + 2m_\omega \\ I = I_c + m_c \cdot d^2 + 2m_\omega L^2 + 2I_m \end{cases} \quad (2.24)$$

L'énergie potentielle étant nulle car le robot se déplace sur un plan horizontal.

Alors on a donc le Lagrangien :

$$L = T.$$

En se servant de l'équation (2.23), l'équation (2.17) devient :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_A - m\ddot{\theta}\sin\theta - m\dot{\theta}^2\cos\theta = C_1 \\ m\ddot{y}_A - m\ddot{\theta}\cos\theta - m\dot{\theta}^2\sin\theta = C_2 \\ -m\ddot{x}_A\sin\theta + m\ddot{y}_A\cos\theta + I\ddot{\theta} = C_3 \\ I_\omega\ddot{\phi}_R = \tau_R + C_4 \\ I_\omega\ddot{\phi}_L = \tau_L + C_5 \end{cases} \quad (2.25)$$

avec  $C_1, C_2, C_3, C_4$  et  $C_5$  sont les coefficients relatifs aux contraintes cinématiques qui peuvent être exprimés en fonction du vecteur de multiplicateurs de Lagrange et de la matrice de contrainte cinématique  $A^T(q)$ , où  $A^T(q) = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5]^T$ .

Le modèle dynamique du robot mobile à roue peut se mettre sous la forme :

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} = B(q)u - A^T(q) \cdot \lambda \quad (2.26)$$

avec

$$M(q) = \begin{pmatrix} m & 0 & -m\dot{\theta}\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & m & m\dot{\theta}\cos\theta & 0 & 0 \\ -m\dot{\theta}\sin\theta & m\dot{\theta}\cos\theta & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{pmatrix}$$

$$V(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} 0 & -m\dot{\theta}\cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m\dot{\theta}\sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T(q) \cdot \lambda = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & \sin\theta \\ 0 & L & -L \\ 0 & -R & 0 \\ 0 & 0 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix}$$

$M(q)$  : est la matrice d'inertie symétrique définie positive de taille  $n \times n$  ;

$V(q, \dot{q})$  : est la matrice des forces centrifuges et des forces de Coriolis ;

$B(q)$  : est la matrice de transformation d'entrée ;

$A(q)$  : est la matrice des contraintes non-holonomes ;

$u$  : est le vecteur d'entrée,  $u = \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix}$ .

Il est possible d'obtenir l'expression du modèle dynamique du robot en éliminant le terme  $A^T(q) \cdot \lambda$  qui correspond aux forces de contraintes liées aux contraintes cinématiques.

En définissant  $\eta = \begin{pmatrix} \dot{\phi}_R \\ \dot{\phi}_L \end{pmatrix}$  comme étant le vecteur de vitesses auxiliaires, on peut écrire que (en utilisant 2.15) :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_R \\ \dot{\phi}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R/2)\cos\theta & (R/2)\cos\theta \\ (R/2)\sin\theta & (R/2)\sin\theta \\ R/2L & -R/2L \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_R \\ \dot{\phi}_L \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{q} = S(q)\eta \quad (2.27a)$$

et

$$\ddot{q} = \dot{S}(q)\eta + S(q)\dot{\eta} \quad (2.27b)$$

$S(q)$  est une matrice de rang complet qui satisfait à la condition suivante :

$$S^T(q)A^T(q) = 0 \quad (2.28)$$

En remplaçant (2.27) dans (2.26), on obtient :

$$M(q)[\dot{S}(q)\eta + S(q)\dot{\eta}] + V(q, \dot{q})S(q)\eta = B(q)u - A^T(q) \cdot \lambda \quad (2.29)$$

En multipliant l'équation (2.29) par  $S^T(q)$ , on a :

$$\begin{aligned} S^T(q)M(q)\dot{S}(q)\eta + S^T(q)M(q)S(q)\dot{\eta} + S^T(q)V(q, \dot{q})S(q)\eta = \\ S^T(q)B(q)u - S^T(q)A^T(q) \cdot \lambda \end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{cases} \bar{M}(q) = S^T(q)M(q)S(q) \\ \bar{V}(q, \dot{q}) = S^T(q)M(q)\dot{S}(q) + S^T(q)V(q, \dot{q})S(q) \\ \bar{B}(q) = S^T(q)B(q) \end{cases} \quad (2.30)$$

L'équation (2.29) sous la forme réduite est :

$$\bar{M}(q)\dot{\eta} + \bar{V}(q, \dot{q})\eta = \bar{B}(q)u \quad (2.31)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{M}(q) &= \begin{bmatrix} I_w + \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 + I) & \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 - I) \\ \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 - I) & I_w + \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 + I) \end{bmatrix}, \\ \bar{V}(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{R^2}{2L^2}(m_c d \dot{\theta}) \\ -\frac{R^2}{2L^2}(m_c d \dot{\theta}) & 0 \end{bmatrix}, \text{ et } \bar{B}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En insérant (2.13) dans (2.31) on obtient :

$$\begin{bmatrix} \left(m + \frac{2I_w}{R^2}\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left(I + \frac{2L^2}{R^2} I_w\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -m_c d \omega \\ m_c d \omega & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{L}{R} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

avec

$$u = \begin{cases} u_1 = \tau_R + \tau_L \\ u_2 = \tau_R - \tau_L \end{cases}$$

où

$(\tau_R, \tau_L)$  : est le couple d'entrée exprimé en Newton mètres (N.m).

L'équation (2.32) est la forme non linéaire du modèle dynamique du robot mobile soumis à notre étude.

L'expression linéarisée de l'équation (2.32) est :

$$\begin{bmatrix} \left(m + \frac{2I_w}{R^2}\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left(I + \frac{2L^2}{R^2} I_w\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{L}{R} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

où

$m$  : est la masse totale du robot ;

$I$  : est l'inertie totale équivalente du système ;

$R$  : est le rayon de la roue ;

$2L$  : est la largeur du robot.

En remplaçant  $\left(m + \frac{2I_w}{R^2}\right)$  par  $m_0$  et  $\left(I + \frac{2L^2}{R^2} I_w\right)$  par  $I_0$ , on obtient une expression simplifiée de l'équation (2.33) donnée par :

$$\begin{bmatrix} m_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{L}{R} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

## **Conclusion**

Dans ce chapitre, la classification générale, les constituants et la modélisation du robot mobile ont été présentés. Nous avons également développé des équations cinématiques et dynamiques du robot mobile unicycle. Le modèle dynamique, tout comme le modèle cinématique sont deux modèles essentiels sur lesquels est basée la commande. La modélisation mathématique de ce robot à roues différentielles tient compte des hypothèses 1 et 2 ci-dessus. Ce travail nous a permis de mettre en évidence la non-linéarité des systèmes réels. Dans le prochain chapitre, nous allons présenter les notions de systèmes non linéaire, de stabilité et de commandes non linéaires en se servant des modèles dynamiques linéaire et non linéaire.



## **CHAPITRE 3 : SYSTEMES NON LINEAIRES ET COMMANDES**

### **Introduction**

#### **1. Les systèmes non-linéaires**

- 1.1. Représentation des systèmes non-linéaires
- 1.2. Système autonome
- 1.3. Systèmes à structure variable
- 1.4. Équilibre
- 1.5. Plan de phase
- 1.6. Stabilité locale et Stabilité globale

#### **2. Les commandes non-linéaires**

- 2.1. Commande par linéarisation
- 2.2. Commandes adaptatives

### **Conclusion**

## Introduction

Depuis plus d'un quart de siècle aujourd'hui, en science robotique, un nombre très important de publications a été consacré aux problèmes d'analyse et de synthèse de lois de commande pour les systèmes non linéaires. Contrairement au cas des systèmes linéaires pour lesquels l'automatique fournit une panoplie de méthodes pour la synthèse de la commande, les systèmes non linéaires ne disposent pas d'outils et de méthodes générales pour réaliser cette analyse et/ou synthèse des lois de commande. Ceci est dû au fait que les systèmes non linéaires peuvent posséder des dynamiques complexes et des structures extrêmement variées.

L'une des approches, basée sur la théorie de l'automatique linéaire, consiste à linéariser la dynamique non linéaire du système autour d'un point de fonctionnement de telle sorte que les outils de la commande linéaire puissent être exploités pour la synthèse d'une loi de commande assurant les performances recherchées. La nécessité de garantir des performances sur une plage importante de fonctionnement des systèmes impose la prise en compte de leur dynamique globale non linéaire dans la synthèse des lois de commande.

La technique de linéarisation intervient dans le développement des lois de commande des systèmes non linéaires. Le principe de base de la linéarisation est de transformer, par linéarisation autour d'un point d'équilibre, un système non linéaire en un système linéaire puis utiliser les outils de synthèse des systèmes linéaires. Cependant, cette technique ne peut être utilisée que pour les systèmes non linéaires dont le modèle dynamique est suffisamment bien connu, et autour du point de fonctionnement.

Pour surmonter ce problème, plusieurs approches de commande adaptative ont été proposées [26]. Dans ces approches, on suppose que le modèle du système non linéaire peut être exprimé sous la forme d'un produit de fonctions non linéaires connues à l'aide de paramètres inconnus. Malheureusement, il est souvent difficile, voire impossible de décrire tous les phénomènes mis en jeu dans un système à partir de fonctions non linéaires connues, notamment pour un système physique complexe.

Le présent chapitre traitera deux grandes parties de notre sujet de mémoire. Premièrement, on présente des notions liées aux systèmes linéaires, non linéaires et à leurs stabilités. Deuxièmement, on présentera les commandes appliquées. Dans notre cas on insistera sur la commande basée sur la théorie de Lyapunov et la commande par mode glissant classique et adaptative.

## 1. Les systèmes non-linéaires

La non-linéarité signifie que les interactions entre les objets qui composent le système (et qui sont donc les causes des transformations) sont telles qu'il n'existe ni proportionnalité des effets aux causes qui les sous-tendent, ni additivité des causes sur ces effets. Cette expression apparaît généralement dans les systèmes complexes à commander. Quelques notions relatives aux systèmes non linéaires seront abordées.

### 1.1. Représentation des systèmes non-linéaires

On appelle systèmes linéaires les systèmes physiques représentés par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. L'hypothèse de linéarité équivaut au principe de superposition. Les systèmes non linéaires, par opposition aux systèmes linéaires, sont des systèmes physiques qui ne sont pas régis par des équations linéaires. Autrement dit, le principe de superposition ne peut leur être appliqué.

La forme la plus utilisée pour la représentation des systèmes non linéaires est la suivante [26]:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \forall t \geq 0 ; x(t = 0) = x_0 \quad (3.1)$$

où  $t$  est le temps,  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathcal{R}^m$  est le vecteur de commande ou d'entrée du système,  $x_0$  est l'état initial.

$f: \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}^n$  est une fonction non linéaire.

## 1.2. Système autonome

Le système non linéaire (3.1) est dit autonome si la fonction  $f$  ne dépend pas explicitement du temps  $t$ , c'est-à-dire que le système peut être écrit sous la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad \forall t \geq 0 ; x(t = 0) = x_0 \quad (3.2)$$

Si non le système (3.1) est dit non autonome.

Parfois on utilise le terme de « invariant dans le temps ou stationnaire » au lieu du terme « autonome » et le terme « variant dans le temps » à la place de « non autonome ». Dans le cas d'un système non autonome, si les variations des caractéristiques sont lentes dans le temps, on pourra approximer le système par une séquence de systèmes autonomes.

## 1.3. Systèmes à structures variables

Lorsque la structure du système ou du correcteur utilisé prend d'une façon discontinue deux ou plusieurs expressions, la notion de système à structures variables intervient. Il en découle les définitions suivantes :

Un système à structures variables est un système dont la structure change pendant son fonctionnement. Il est caractérisé par le choix d'une structure et d'une logique de commutation. Ce choix permet au système de commuter d'une structure à l'autre à tout instant. De plus, un tel système peut avoir de nouvelles propriétés qui n'existent pas dans chaque structure.

Un système est dit à structures variables s'il admet une représentation par des équations différentielles du type :

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si la condition 1 est vérifiée} \\ \vdots & \\ f_n(x) & \text{si la condition } n \text{ est vérifiée} \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont des fonctions appartenant à un ensemble de sous-système de classe  $C^k$ .

Par conséquent, les systèmes à structures variables sont caractérisés par le choix d'une fonction et d'une logique de commutation.

## 1.4. Équilibre

Physiquement, un système est en équilibre quand il conserve son état en absence de forces externes. Mathématiquement, cela équivaut à dire que la dérivée  $\dot{x}$  de son état est nulle.

Pour un système :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

l'état (ou les états) d'équilibre  $x_e$  est la solution (sont les solutions) de l'équation algébrique suivante :

$$f(x(t), u(t), t) = 0 \quad (3.4)$$

Dans le cas de systèmes linéaires représentés par :

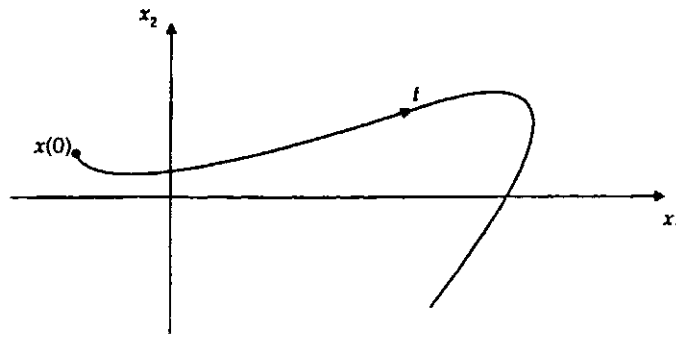
$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t),$$

$x = 0$  est le seul point équilibre pour tout le système linéaire.

Si  $A$  est régulière, où  $A$  est la matrice d'état du système, l'origine est le seul point d'équilibre. Dans le cas où la matrice  $A$  est singulière, tout le sous-espace défini par  $Ax(t) = 0$  constitue une région d'équilibre. Pour les systèmes non linéaires, la solution est moins évidente et l'origine n'est pas forcément un point d'équilibre. De plus, en présence de plusieurs équilibres, ces derniers peuvent se présenter, comme dans le cas linéaire, sous forme de domaines continus, mais aussi de points isolés, voire même de combinaisons des deux.

## 1.5. Plan de phase

Pour comprendre le comportement d'un système non linéaire, on utilise souvent une représentation de ses trajectoires dans l'espace de phase (Figure 12). Ces trajectoires sont un ensemble de courbes qui représentent l'évolution de l'état du système dans le temps. L'obtention de ces trajectoires passe, toutefois, par la résolution de l'équation différentielle (3.1), qui peut s'avérer une tâche difficile. C'est pourquoi, les outils permettant l'analyse du comportement du système, sans avoir à résoudre les équations le décrivant, ont connu un grand succès. Les techniques basées sur la deuxième méthode de Lyapunov font partie de cette classe.



**Figure 12:** Trajectoire d'un système dans le plan de phase [1]

## 1.6. Stabilité locale et stabilité globale

Un système linéaire possédant un point d'équilibre stable est dit système stable. Il n'en est pas de même pour un système non linéaire, étant donné que celui-ci peut avoir plusieurs positions d'équilibre. La stabilité de l'une de ces positions d'équilibre ne suffit pas à elle seule à prédire la stabilité du système.

Afin de quantifier l'influence de la stabilité d'un point d'équilibre sur la stabilité du système, de nouvelles définitions de la stabilité sont introduites : on parle alors de stabilité locale, stabilité asymptotique, stabilité globale et région d'attraction.

### 1.6.1. Fonction définie positive

Une fonction définie positive est une fonction

$$f(x): \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R} \text{ telle que } f(x) > 0, \forall x \neq 0 \text{ et } f(x) = 0 \text{ lorsque } x = 0.$$

### 1.6.2. Candidat de Lyapunov

Une fonction scalaire définie positive continue et qui dépend de l'état  $x$ , notée  $V(x)$ , est une fonction candidate de Lyapunov.

Soit  $V(x): \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^+$  une fonction telle que :

- $V(x)$  est continue différentiable en tous ces arguments,
- $V(x)$  est définie positive,

- Il existe deux fonctions scalaires  $a$  et  $b$  de  $\mathcal{R}^+$  dans  $\mathcal{R}^+$  continues, monotones, non décroissantes telles que :

$$a(0) = b(0) = 0$$

$\forall x \in \mathcal{R}^n : a(\|x\|) \leq V(x) \leq b(\|x\|)$ , alors  $V(x)$  est une fonction candidate de Lyapunov.

### 1.6.3. Stabilité locale

Si dans une boule  $\mathcal{B}_{\mathcal{R}_0}$  il existe une fonction scalaire  $V(x)$ , dont les dérivées partielles d'ordre un sont continues, et telle que :

- $V(x)$  est définie positive dans  $\mathcal{B}_{\mathcal{R}_0}$  ( $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$  dans  $\mathcal{B}_{\mathcal{R}_0}$  et  $V(0) = 0$ ) ;
- $\dot{V}(x)$  est semi-définie négative dans  $\mathcal{B}_{\mathcal{R}_0}$  ( $\frac{d}{dt}V(x) \leq 0$ ).

Alors le point d'équilibre  $x = 0$  est stable (au sens local).

Si en plus  $\frac{d}{dt}V(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$ , dans  $\mathcal{B}_{\mathcal{R}_0}$  alors  $x = 0$  est asymptotiquement stable.

### 1.6.4. Stabilité globale

S'il existe une fonction scalaire  $V(x)$ , dont les dérivées partielles d'ordre un sont continues, et telle que :

- $V(x)$  est définie positive,
- $\dot{V}(x)$  est définie négative,
- $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) \rightarrow \infty$  ( $V(x)$  est radialement non-bornée).

Alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.

### 1.6.5. Région d'attraction

La région autour de la position d'équilibre, à l'intérieur de laquelle toutes les trajectoires s'approchent du point d'équilibre, ou restent au voisinage du point d'équilibre est appelée région ou domaine d'attraction. Sa taille est souvent un facteur très important dans l'évaluation des performances des systèmes non-linéaires.

## 2. Les commandes non-linéaires.

La navigation d'un robot nécessite au préalable la connaissance des modèles cinématique et dynamique du robot, du mouvement du robot et ensuite de la loi de commande à appliquer au robot. Tel que mentionné en introduction, le choix de la loi de commande reste un problème difficile à résoudre à cause du fait que chaque modèle de robots se présente comme un cas particulier. Dans cette partie du travail, nous présenterons quelques lois de commandes non-linéaires.

A cause du fait qu'un système non-linéaire peut être linéarisé autour d'un point d'équilibre, la commande par linéarisation est l'une des commandes qui apparaît dans un premier plan. La commande adaptative présentée parmi plusieurs lois de commandes non linéaires est celle qui convient le mieux avec un dispositif (système) non-linéaire dont les paramètres du système sont inconnus ou inexacts. Le système étant soumis à des perturbations externes, la commande par mode glissant est une commande robuste car elle permet d'atténuer les perturbations qui affectent le système. Cette dernière sera développée dans le chapitre suivant.

### 2.1. Commande par linéarisation

#### Principe :

Soit le système non linéaire de la forme

$$\dot{x} = f(x, u),$$

où  $x = 0$  ;  $u = 0$  est le point de fonctionnement considéré. Son système linéaire associé est donné par :

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.5}$$



où

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right|_{x=0, u=0} \quad \text{et} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right|_{x=0, u=0}$$

Le design s'effectue sur le système linéaire ; une fois les objectifs atteints, la commande est appliquée au système non linéaire dont on évalue les performances. Le fait que le système linéaire réponde aux exigences, ne garantit en rien le bon comportement du système non linéaire. C'est une condition nécessaire mais pas suffisante au bon fonctionnement de ce dernier. Une amélioration peut, toutefois, être apportée à cette approche, en considérant les variations dues à la présence des non-linéarités comme des perturbations affectant le modèle linéaire (modèle nominal). Par la suite, une loi de commande robuste qui tient compte de ces perturbations est conçue.

### 2.1.1. La linéarisation exacte

Cette approche consiste à linéariser le système en boucle fermée, par une série de transformations, sans faire d'approximations [26]. La commande choisie est composée de deux parties. La première a pour rôle d'annuler les différents termes non linéaires du procédé, alors que la deuxième est choisie pour satisfaire les exigences en boucle fermée du système linéarisé.

#### Principe :

Considérons la classe de systèmes non linéaires de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = \eta(x) \end{cases} \quad (3.6)$$

où l'objectif est de trouver une loi de commande

$$u = \sigma(x) + \beta(x)v$$

et une transformation  $z = T(x)$  qui transforment le système non linéaire en un système linéaire équivalent [26].  $v$  est la commande pour le nouveau système. Deux cas sont à distinguer.

### 2.1.2. Linéarisation entrée/état

Cette approche consiste à choisir la loi de commande  $u$  afin que toutes les équations d'état du système compensé aient une forme linéaire. Cette solution revient à annuler les différentes non-linéarités présentes dans les équations, afin d'obtenir des relations linéaires entre la nouvelle entrée  $v$  et les différentes variables d'état.

Certaines propriétés structurales du système peuvent faciliter la linéarisation. Il est évident que pour annuler une non linéarité  $\sigma(x)$  par soustraction, cette dernière doit toujours apparaître au même endroit que la commande  $u$  et vient s'ajouter à celle-ci ( $u + \sigma(x)$ ). De même, afin de pouvoir annuler une non linéarité  $\mu(x)$  par division,  $u$  et  $\mu(x)$  doivent toujours apparaître comme un produit  $u\mu(x)$ . Si  $\mu(x)$  est non singulière dans le domaine d'intérêt  $\mathcal{D}$ , alors elle peut être annulée par une commande

$$u = \beta(x)v, \text{ où } \beta(x) = \mu^{-1}(x). \quad (3.7)$$

Pour être capable de ramener le système non linéaire à une forme linéaire contrôlable, il suffit alors que son équation ait la structure suivante :

$$\dot{x} = Ax + B\beta^{-1}(x)[u - \sigma(x)] \quad (3.8)$$

Dans ce cas, on peut transformer le système par la commande suivante :

$$u = \sigma(x) + \beta(x)v$$

Ceci nous permet d'obtenir un système linéaire équivalent, soit :

$$\dot{x} = Ax + Bv$$

Ainsi les techniques linéaires permettent le choix de la loi de commande adéquate  $v$  afin d'obtenir les performances requises.

### 2.1.3. Linéarisation entrée/sortie

Le modèle d'un système est souvent représenté par les équations d'état et une équation de sortie. La linéarisation des équations d'état ne garantit pas forcément celle de l'équation de sortie. Quand on s'intéresse aux variables de sortie (problème de poursuite par exemple), il est plus intéressant de linéariser la relation entrée/sortie au prix de laisser une partie des équations d'état non linéaire. C'est le problème de la linéarisation entrée/sortie.

## **2.2. Commandes adaptatives**

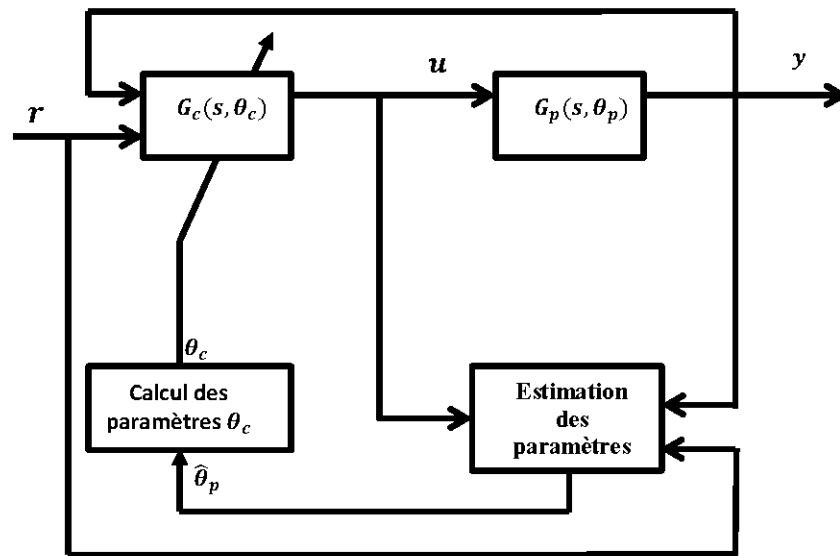
La commande adaptative est une commande dans laquelle le contrôleur est automatiquement ajusté afin de compenser des changements dans le procédé et/ou son environnement. Ce genre de problème peut être traité dans le cadre de la commande robuste, mais en présence de fortes perturbations, d'incertitudes du modèle ou de paramètres qui varient fortement dans le temps, la commande adaptative constitue ainsi un meilleur choix. Ce domaine, qui a vu le jour dans les années 50, s'est considérablement développé au cours des trois dernières décennies et reste un domaine de recherche très actif.

Un contrôleur adaptatif n'est autre que la combinaison d'un module d'estimation en ligne de certains paramètres inconnus, et d'un contrôleur qui se sert de ces paramètres. Cette combinaison donne lieu à deux approches différentes de conception et de commande à savoir : la commande adaptative indirecte et la commande adaptative directe.

### **2.2.1. Commande adaptative indirecte**

Dans cette approche (Figure 13) les paramètres du procédé sont estimés en ligne, pour être ensuite utilisés dans le calcul de ceux du contrôleur. Dans le cas d'un système linéaire, le modèle linéaire du procédé  $G_p(s, \theta_p)$  est paramétrisé par rapport à certains paramètres inconnus  $\theta_p$ . Un estimateur génère des estimés  $\hat{\theta}_p$  de  $\theta_p$ , à chaque instant  $t$ , en utilisant les signaux d'entrées et de sorties ( $u$  et  $y$ ) du procédé.

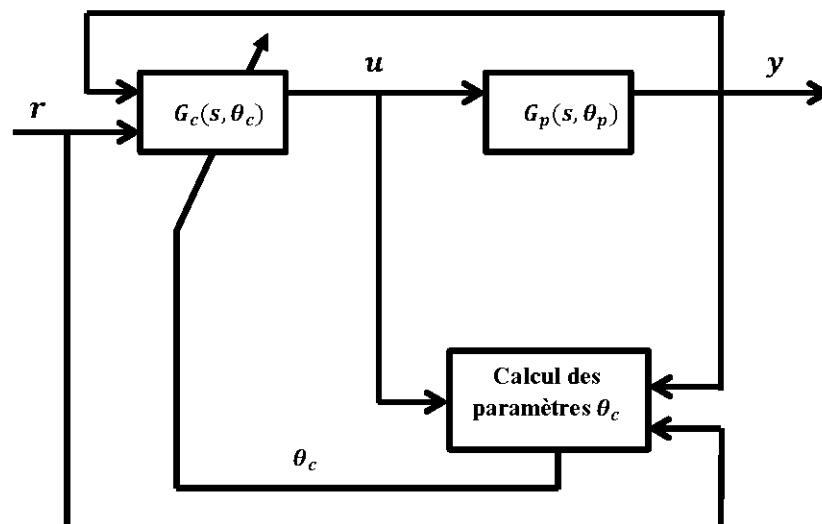
Dans la procédure de design, pour calculer les paramètres du contrôleur  $\theta_c$ , le modèle estimé du procédé  $G_p(s, \hat{\theta}_p)$  est considéré comme étant le vrai modèle, à chaque instant  $t$ .



*Figure 13: Commande adaptative indirecte [26]*

### 2.2.2. Commande adaptative directe

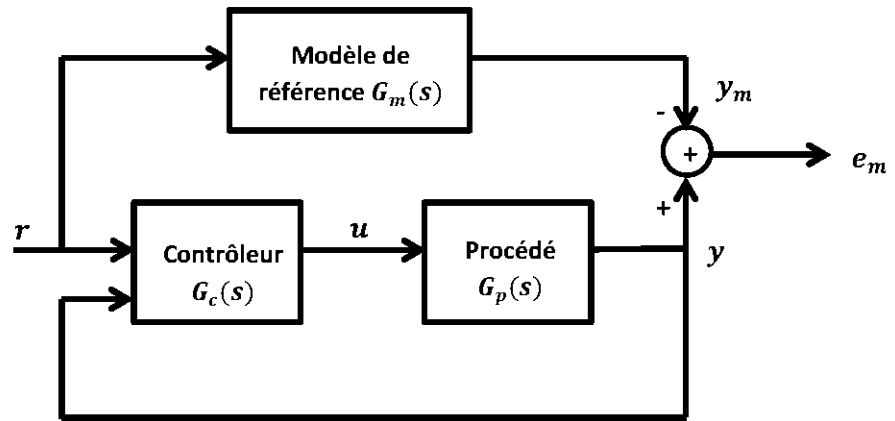
Contrairement à la méthode précédente, les paramètres du contrôleur sont directement estimés, et on n'a nul besoin d'estimer ceux du procédé. Le modèle de ce dernier est directement paramétrisé en fonction des paramètres inconnus  $\theta_c$  du contrôleur. Les estimés  $\hat{\theta}_c$ , servent directement à mettre à jour les paramètres du contrôleur, sans aucun calcul intermédiaire (Figure 14).



*Figure 14: Commande adaptative directe [26]*

### 2.2.3. Commande adaptative par modèle de référence

Le principe d'une commande par modèle de référence (*MRC*) est illustré dans la figure 15. L'objectif d'une telle commande est de trouver une loi de contrôle  $u$  qui change la structure et la dynamique du procédé (à paramètres connus) de façon à ce que ses propriétés entrée/sortie ( $r(t) / y(t)$ ), en boucle fermée, coïncident avec celles d'un modèle de référence  $G_m(s)$  préalablement choisi [26]. Si les paramètres du procédé sont inconnus, une loi d'identification est greffée au régulateur *MRC*. On parle dans ce cas, de commande *MRAC*. Cette dernière, qui peut être directe ou indirecte, constitue l'une des structures les plus utilisées dans le domaine de la commande adaptative.



*Figure 15: Commande adaptative par modèle de référence [26]*

#### Principe de l'équivalence certaine

Le principe des deux approches (directe et indirecte) tels que présentés est conceptuellement simple. Le contrôleur est conçu pour un modèle à paramètres connus. Par la suite, les paramètres inconnus du procédé sont estimés en ligne. L'idée consiste à considérer que l'on dispose du bon modèle en tout temps. À chaque instant  $t$ , la procédure de design du contrôleur  $G_c(s, \theta_c)$  considère les estimés,  $\hat{\theta}_p$  (dans le cas indirect) ou  $\hat{\theta}_c$  (dans le cas direct), comme s'ils étaient les vrais paramètres.

Cette approche, largement dominante en commande adaptative, est connue sous le nom de '*principe de l'équivalence certaine*'.

Le libre choix, aussi bien de la méthode de design que celle de l'estimation, constitue le point fort de cette approche. On peut combiner différents estimateurs avec différentes lois de commande, pour obtenir un vaste choix de structures adaptatives. Toutefois, étant donné que la stabilité de ces structures est prouvée pour un procédé à paramètres connus, le bon fonctionnement de la boucle n'est pas garanti dans une large plage.

Par conséquent, les régulateurs adaptatifs, basés sur le '*principe de l'équivalence certaine*', peuvent rendre instable la plupart des structures adaptatives qui les utilisent [26]. Les contrôleurs basés sur la méthode directe de Lyapunov présentent une meilleure alternative.

#### **2.2.4. Commande adaptative basée sur la théorie de Lyapunov**

L'idée principale de l'utilisation de la fonction de Lyapunov dans la commande adaptative consiste à calculer une loi de commande et une loi de mise à jour des paramètres, afin de garantir que la dérivée d'une certaine fonction, définie positive et bien choisie, est non positive. L'approche consiste donc à trouver un triplet (fonction de Lyapunov, loi de commande, loi d'adaptation) qui répond aux spécifications (Figure 16). Les tâches s'effectuent simultanément, et la dynamique de l'estimation est prise en compte et/ou maîtrisée, afin d'éviter tout effet destructeur.

##### **Principe :**

Il s'agit, pour un système scalaire, d'utiliser la fonction de Lyapunov pour calculer une loi de commande et une dynamique d'adaptation qui assurent la stabilité, en présence d'incertitudes. On considère le cas simple d'un système non linéaire (scalaire) décrit par l'équation :

$$\dot{x} = u + \varphi(x)^T \theta \quad (3.9)$$

où  $\theta$  est un vecteur de paramètres constants et inconnus. On désire trouver la loi de commande  $u(x, \theta)$  qui assure la stabilité de l'origine du système ci-dessus. Pour ce faire, on prend comme fonction de Lyapunov, la forme quadratique suivante :

$$V_1(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad (3.10)$$

qui est définie positive. Sa dérivée, évaluée le long de la solution du système s'écrit

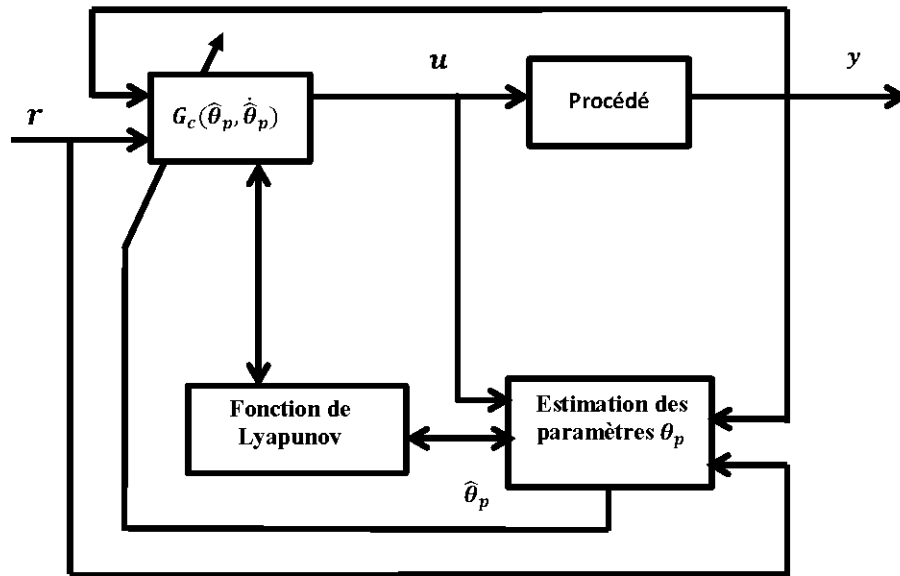
$$\dot{V}_1(x) = x\dot{x} = x[u + \varphi(x)^T \theta] \quad (3.11)$$

Le choix de la loi de commande

$$u(x, \theta) = -\varphi(x)^T \theta - k_1 x \quad (3.12)$$

où  $k_1 > 0$ , permet de rendre  $\dot{V}_1$  négative. En effet, avec un tel choix, on a

$$\dot{V}_1(x) = -k_1 x^2 \leq 0 \quad (3.13)$$



**Figure 16:** Commande adaptative basée sur Lyapunov [26]

Deux cas se présentent :

- $\theta$  est connu : la loi de commande  $u(x, \theta)$  peut être réalisée, ce qui permet de stabiliser l'origine du système. L'objectif du design est ainsi atteint.

- $\theta$  est inconnu : le contrôleur décrit par  $u(x, \theta)$  ne peut être réalisé. On se propose de le remplacer par son équivalent (basé sur le principe de l'équivalence certaine), où, au lieu de  $\theta$ , on utilise son estimé  $\hat{\theta}$  dans  $u(x, \theta)$ .

Ainsi, on a :

$$u = -\varphi(x)^T \hat{\theta} - k_1 x. \quad (3.14)$$

En remplaçant la nouvelle expression de  $u$  dans l'équation du système on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -k_1 x + \varphi(x)^T (\theta - \hat{\theta}) \\ \dot{x} &= -k_1 x + \varphi(x)^T \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (3.15)$$

où  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  représente l'erreur d'estimation.

Ainsi la dérivée de la fonction de Lyapunov s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x) &= x[-k_1 x + \varphi(x)^T \tilde{\theta}] \\ \dot{V}_1(x) &= -k_1 x^2 + x\varphi(x)^T \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Étant donné que l'expression contient le terme inconnu  $\tilde{\theta}$ , son signe est indéfini, aucune conclusion ne peut être tirée quant à la stabilité du système. Afin d'en savoir plus sur cette stabilité, on construit un contrôleur dynamique, en augmentant à la nouvelle commande  $u$ , une loi de mise à jour pour l'estimé  $\hat{\theta}$ .

Un bon choix de cette loi, qui doit assurer la stabilité de l'ensemble, est à déterminer. On définit alors une nouvelle fonction de Lyapunov en ajoutant, à la fonction initiale, un terme quadratique en l'erreur d'estimation  $\tilde{\theta}$ .

$$V_2(x, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (3.17)$$

où  $\Gamma$  est une matrice (définie positive) qui représente le gain d'adaptation.

La dérivée de cette fonction devient alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= x\dot{x} + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \\ \dot{V}_2 &= -k_1 x^2 + x\varphi(x)^T \tilde{\theta} + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \\ \dot{V}_2 &= -k_1 x^2 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} [\dot{\tilde{\theta}} + \tau] \quad \text{avec } \tau = \Gamma x \varphi(x) \end{aligned} \quad (3.18)$$

La dérivée reste toujours indéfinie. Cette fois, le degré de liberté, offert par le libre choix de la dynamique de mise à jour, permet de choisir cette dernière de façon à annuler le second terme de l'équation.



Le choix

$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\tilde{\theta}} = \tau$$

permet d'obtenir

$$\dot{V}_2 = -k_1 x^2 \leq 0$$

Le système résultant est donné par :

$$\dot{x} = -k_1 x + \varphi(x)^T (\theta - \hat{\theta})$$

avec la loi de commande :

$$u = -\varphi(x)^T \hat{\theta} - k_1 x$$

et la loi de mise à jour :

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma x \varphi(x) \tag{3.19}$$

Ce type de méthode présente un intérêt pour la commande des systèmes non linéaires.

## **Conclusion**

Le travail présenté dans ce chapitre illustre dans un premier temps plusieurs notions parmi lesquelles la stabilité locale et globale, le point d'équilibre, le plan de phase et la région d'attraction. Dans un second temps, nous avons présentés quelques lois de commande non-linéaires parmi lesquelles la loi de commande adaptative. Etant donné que notre système est non-linéaire, et que les paramètres du système sont incertains, et afin d'amener un plus en ce qui concerne la commande des robots mobiles, nous proposons dans le chapitre 4 une loi de commande robuste et adaptative. Cette loi de commande est basée sur le mode glissant. Le chapitre suivant sera axé sur le développement d'une loi de commande par mode glissant adaptatif qui tient compte des perturbations intérieures et extérieures, ainsi que des paramètres inconnus.

## **CHAPITRE 4 : COMMANDE PAR MODE GLISSANT ADAPTATIF APPLIQUEE AU ROBOT MOBILE UNICYCLE**

### **Introduction**

#### **1. Les modèles du robot**

- 1.1. Le modèle cinématique.
- 1.2. Le modèle dynamique.

#### **2. Architecture de contrôle**

- 2.1. Les contrôleurs
- 2.2. Le contrôleur cinématique.
- 2.3. Le contrôleur dynamique

#### **3. La Commande par mode glissant classique**

- 3.1. Principe
- 3.2. La surface de glissement
- 3.3. Condition d'existence du mode de glissant
- 3.4. Calcul de la commande

#### **4. La commande par mode glissant adaptatif**

- 4.1. Commande par mode glissant adaptatif avec gain constant
- 4.2. Commande par mode glissant adaptatif avec gain adaptatif

### **Conclusion**

## Introduction

La commande par mode glissant, dite commande à structures variables, consiste à amener la trajectoire d'état du système bouclé vers une surface de glissement et à la faire commuter à l'aide d'une logique de commutation autour de la surface jusqu'au point d'équilibre. Cette commande a connu un essor considérable durant les dernières décennies. Ceci est dû principalement à sa propriété de convergence rapide et en temps fini des erreurs, ainsi, que la grande robustesse par rapport aux erreurs de modélisation et certains types de perturbations extérieures. Le système dit à structures variables peut être défini comme un système dont les paramètres du régulateur peuvent prendre deux valeurs, la commutation d'une valeur à une autre s'effectue à la traversée d'une hypersurface (surface de glissement) de l'espace de phase du système de façon à contraindre le point représentatif du mouvement du système à rester sur cette hyper surface, d'où le nom de régime glissant.

Dans cette partie du travail, nous allons présenter dans un premier temps le modèle cinématique et le modèle dynamique du robot, et en deuxième lieu nous présenterons l'architecture de contrôle du robot mobile à commander. En troisième plan, nous développerons une loi de commande basée sur le régime glissant pour le cas de notre système. En tenant compte de la non-linéarité du système, des incertitudes des paramètres du système et des perturbations extérieures au système, nous allons concevoir une loi de commande adaptative qui permettra au robot de suivre la trajectoire désirée.

### 1. Les modèles du robot

Afin de simplifier la lecture de ce chapitre, nous allons résumer dans ce qui suit les modèles cinématique et dynamique du robot mobile unicycle.

#### 1.1. Le modèle cinématique

Le modèle cinématique d'un robot mobile non holonome de type unicycle dans le repère fixe  $\{X_I, Y_I\}$  est présenté par l'équation (2.16) du chapitre 2, soit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_A^I \\ \dot{y}_A^I \\ \dot{\theta}_A^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$$

où  $(x_A^I \ y_A^I \ \theta_A^I)^T$  représente le vecteur position d'un point  $A$  du robot (Figure 18) dans le repère fixe  $\{X_I, Y_I\}$ , et  $(\dot{x}_A^I \ \dot{y}_A^I \ \dot{\theta}_A^I)^T$  représente la dérivée du vecteur position (vecteur vitesse).  $v$  et  $\omega$  représentent, respectivement, la vitesse linéaire et la vitesse angulaire du robot.

Une écriture simplifiée et couramment rencontrée du modèle cinématique d'un robot mobile de type unicycle est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cdot \cos\theta \\ \dot{y} = v \cdot \sin\theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $\theta$  est l'angle d'orientation du robot tel que présenté dans la figure 3 du Chapitre 2.

## 1.2. Le modèle dynamique du robot

Le modèle dynamique est la partie du robot dans laquelle on développe les forces ou des couples qui sont appliquées au robot. Les équations (2.32) et (2.33) représentent, respectivement, les modèles dynamiques non linéaires et linéaires du robot mobile de type unicycle. Ces équations sont les suivantes :

- Modèle dynamique non linéaire :

$$\begin{bmatrix} \left(m + \frac{2I_w}{R^2}\right) & 0 \\ 0 & \left(I + \frac{2L^2}{R^2}I_w\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -m_c d \omega \\ m_c d \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{L}{R} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

- Modèle dynamique linéaire :

$$\begin{bmatrix} \left(m + \frac{2I_w}{R^2}\right) & 0 \\ 0 & \left(I + \frac{2L^2}{R^2}I_w\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{L}{R} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

En remplaçant  $\left(m + \frac{2I_w}{R^2}\right)$  par  $m_0$  et  $\left(I + \frac{2L^2}{R^2}I_w\right)$  par  $I_0$ , les expressions simplifiées de ces deux équations sont les suivantes :

- Modèle dynamique non linéaire simplifié :

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = \frac{m_c d}{m_0} \omega^2 + \frac{1}{m_0 R} u_1(t) \\ \dot{\omega}(t) = \frac{-m_c d}{I_0} v \cdot \omega + \frac{L}{I_0 R} u_2(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

- Modèle dynamique linéaire simplifié :

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = \frac{1}{m_0 R} u_1(t) \\ \dot{\omega}(t) = \frac{L}{I_0 R} u_2(t) \end{cases} \quad (4.3)$$

En tenant compte des perturbations, l'équation (4.2) devient :

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = \frac{m_c d}{m_0} \omega^2 + \frac{1}{m_0 R} u_1(t) + d_1(t) \\ \dot{\omega}(t) = \frac{-m_c d}{I_0} v \cdot \omega + \frac{L}{I_0 R} u_2(t) + d_2(t) \end{cases} \quad (4.4)$$

où  $d(t) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$  est une perturbation inconnue mais bornée.

En posant :

$x = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$  : le vecteur d'état du système ;

$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix}$  : la dérivée de  $x$  ;

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  : la commande ;

$f(x, t) = \begin{bmatrix} \frac{m_c d}{m_0} \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{-m_c d}{I_0} v \cdot \omega \end{bmatrix}$  : une fonction non linéaire ;

$g = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_0 R} & 0 \\ 0 & \frac{L}{I_0 R} \end{bmatrix}$  : une fonction linéaire par rapport à l'état, inversible et

représente la matrice d'entrée du robot.

L'équation (4.4) s'écrit encore :

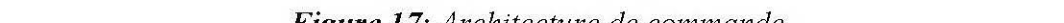
$$\dot{x}(t) = f(x, t) + g(x, t)u(t) + d(t) \quad (4.5)$$

L'équation différentielle (4.5) représente le modèle mathématique du robot mobile de type unicycle sous la forme non linéaire et soumis à une perturbation. En négligeant les termes non linéaires ( $\omega^2, v \cdot \omega$ ) dans la fonction  $f(x, t)$ , le modèle linéaire sans perturbation sera représenté par :

$$\dot{x}(t) = g \cdot u(t)$$

## 2. Architecture de contrôle

En se basant sur les mesures fournies par les différents capteurs, ainsi que les modèles du robot et des moteurs, il est possible de construire l'architecture de commande du robot. La commande du robot consiste à déterminer les tensions (en



Le contrôleur cinématique a pour objectif de minimiser les erreurs en position

La stabilité est assurée pour chaque boucle fermée de manière individuelle

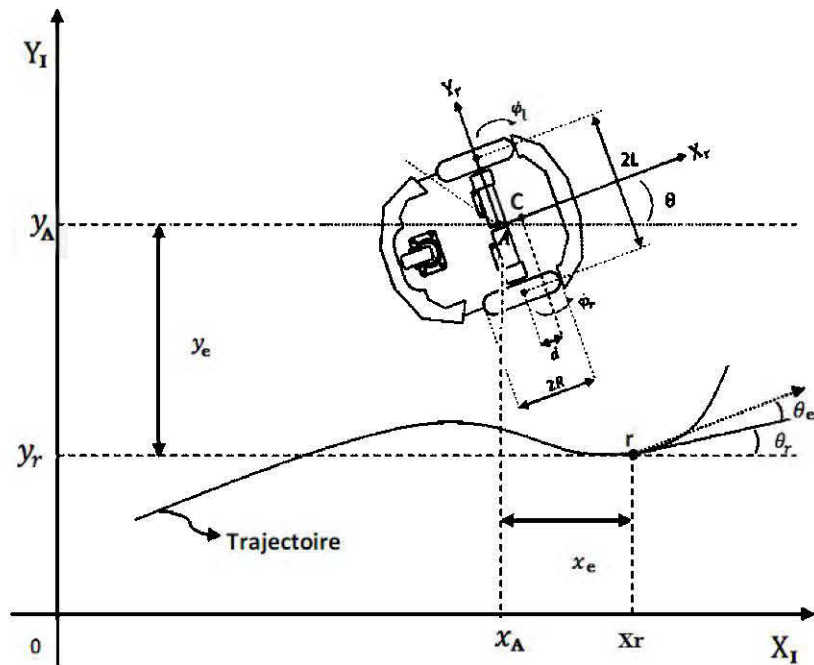
## 22. L'entaillement in 'nation'

En robotique mobile, comparativement au suivi de chemin, le suivi de

forte utilisation des robots mobiles à réaliser certaines tâches nécessite la mise en œuvre d'une loi de commande.

Dans cette section, en se basant sur les études précédentes [8], nous allons présenter et étudier la stabilité d'une loi de commande pour le contrôleur cinématique choisie. Dans ses travaux, le modèle dynamique était considéré parfait, et le développement a été beaucoup plus axé sur l'étude du contrôleur cinématique.

La figure 18 illustre l'erreur de poursuite  $e_p$  entre un robot réel dont le centre de masse est le point  $A$  et un robot de référence dont  $r$  est son point matériel.



**Figure 18:** Représentation de l'erreur de posture du robot.

Le contrôleur cinématique utilisé dans notre travail est un contrôleur qui a été proposé dans [8]. Il fut appliqué sur le modèle cinématique d'un robot mobile non holonome. Ce contrôleur permet d'assurer le suivi de trajectoire. Il ne tient pas compte de la dynamique du robot. Afin de commander le robot, on définit deux postures du robot à savoir :



- la posture de référence  $P_r = (x_r, y_r, \theta_r)^T$  considérée comme la posture de but.
- la posture courante  $P_A = (x_A, y_A, \theta)^T$  considérée comme la posture réelle du robot.

Ainsi l'erreur de posture dans le repère fixe est :

$$e_P = \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{pmatrix} = R^{-1}(\theta)(P_r - P_A) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (P_r - P_A) \quad (4.6)$$

où  $R^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est l'inverse de la matrice orthogonale de rotation entre les deux repères  $\{X_I, Y_I\}$  et  $\{X_r, Y_r\}$ .

L'erreur de posture est donnée par :

$$e_P = \begin{cases} x_e = (x_r - x_A)\cos\theta + (y_r - y_A)\sin\theta \\ y_e = -(x_r - x_A)\sin\theta + (y_r - y_A)\cos\theta \\ \theta_e = \theta_r - \theta \end{cases}$$

A partir de (4.1), on a :

$$\dot{x}_A = v \cos\theta \text{ et } \dot{y}_A = v \sin\theta \text{ alors}$$

$$\dot{x}_A \cos\theta + \dot{y}_A \sin\theta = v_A = v;$$

$$\dot{x}_r \cos\theta + \dot{y}_r \sin\theta = v_r.$$

A partir de la contrainte cinématique (2.2) ; on a :

$$\dot{x}_A \sin\theta - \dot{y}_A \cos\theta = 0 \text{ et } \dot{x}_r \sin\theta - \dot{y}_r \cos\theta = 0.$$

En dérivant l'erreur de posture, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= (\dot{x}_r - \dot{x}_A)\cos\theta + (\dot{y}_r - \dot{y}_A)\sin\theta - (x_r - x_A)\dot{\theta}\sin\theta + (y_r - y_A)\dot{\theta}\cos\theta \\ &= y_e\omega - v_A + \dot{x}_r\cos\theta + \dot{y}_r\sin\theta \\ &= y_e\omega - v_A + \dot{x}_r\cos(\theta_r - \theta_e) + \dot{y}_r\sin(\theta_r - \theta_e) \\ &= y_e\omega - v_A + v_r\cos\theta_e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_e &= -(\dot{x}_r - \dot{x}_A)\sin\theta + (\dot{y}_r - \dot{y}_A)\cos\theta - (x_r - x_A)\dot{\theta}\cos\theta - (y_r - y_A)\dot{\theta}\sin\theta \\ &= -x_e\omega + \dot{x}_A\sin\theta - \dot{y}_A\cos\theta - \dot{x}_r\sin\theta + \dot{y}_r\cos\theta \\ &= -x_e\omega - \dot{x}_r\sin(\theta_r - \theta_e) + \dot{y}_r\cos(\theta_r - \theta_e) \\ &= -x_e\omega + \dot{v}_r\sin\theta_e \end{aligned}$$

$$\dot{\theta}_e = \dot{\theta}_r - \dot{\theta} = \omega_r - \omega$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_e \omega - v_A + v_r \cos \theta_e \\ -x_e \omega + \dot{v}_r \sin \theta_e \\ \omega_r - \omega \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

$v_r$  et  $\omega_r$  étant, respectivement, la vitesse linéaire de référence et la vitesse angulaire de référence.

$v_A$  est la vitesse linéaire du robot au point  $A$  ;

$\omega$  est la vitesse angulaire du robot au point  $A$  ;

$\theta_e = (\theta_r - \theta)$  est l'erreur de l'angle d'orientation du robot.

A des fins de conformité, appelons  $v$ , au lieu de  $v_A$ , la vitesse linéaire du robot au point  $A$ . Ainsi, le contrôleur cinématique que nous avons utilisé est celui proposé dans [8], et est donné par :

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_r \cos \theta_e + K_x x_e \\ \omega_r + v_r (K_y y_e + K_\theta \sin \theta_e) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

où  $K_x$ ,  $K_y$  et  $K_\theta$  sont des constantes positives.

Pour démontrer la stabilité de la boucle cinématique, soit la fonction de Lyapunov définie positive:

$$L_0 = \frac{1}{2}(x_e^2 + y_e^2) + \frac{1}{K_y}(1 - \cos \theta_e). \quad (4.9)$$

$L_0 \geq 0$ . si  $e_p = 0$ , alors  $L_0 = 0$  et si  $e_p \neq 0$ , alors  $L_0 > 0$ .

La dérivée temporelle de  $L_0$  le long de la trajectoire est :

$$\dot{L}_0 = \dot{x}_e x_e + \dot{y}_e y_e + \frac{1}{K_y}(\dot{\theta}_e \sin \theta_e). \quad (4.10)$$

En remplaçant  $\dot{x}_e$ ,  $\dot{y}_e$ , et  $\dot{\theta}_e$  par leurs expressions trouvées dans (4.7), on obtient :

$$\dot{L}_0 = -K_x x_e^2 - \frac{v_r K_\theta \sin^2 \theta_e}{K_y}. \quad (4.11)$$

Si  $v_r \geq 0$  alors  $\dot{L}_0 \leq 0$ . L'origine  $(x_e, y_e, \theta_e) = 0$  est alors asymptotiquement stable.

### **2.3. Le contrôleur dynamique**

Le contrôleur dynamique utilisé dans notre travail a été conçu à partir de la technique du mode glissant. En utilisant le modèle dynamique du robot, on élabore la loi de commande  $u(t)$  qui prend en entrée la vitesse linéaire  $v(t)$  et la vitesse angulaire  $\omega(t)$ . Cette loi de commande sera développée dans la section suivante.

## **3. La Commande par mode glissant classique**

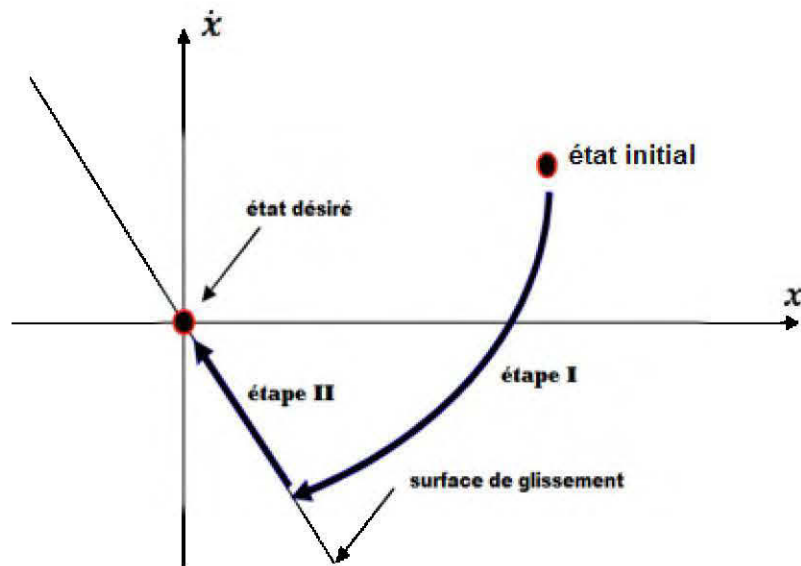
La commande par mode glissant se distingue par sa simplicité : le critère de commutation, qui est une surface de glissement divisant l'espace d'état en deux sous espaces, et les lois de commande dans chaque demi-espace étant des constantes.

### **3.1. Principe**

Le principe de la loi de commande par mode glissant est de contraindre l'état du système à atteindre en un temps fini une hypersurface (surface de glissement) et à y rester, pour tous les modèles de la classe d'incertitudes considérée. Cette hypersurface étant une relation entre les variables d'état du système, elle définit une équation différentielle, et donc détermine totalement la dynamique du système, pourvu qu'il reste sur cette hypersurface.

La figure 19 illustre le principe de commande par mode glissant. Cette commande s'effectue en deux étapes à savoir :

- étape I : la convergence vers la surface de glissement.
- étape II : le glissement le long de la surface de glissement.



*Figure 19: Illustration du mode glissant dans le plan de phase*

La commande par mode glissant a deux principaux avantages. Premièrement, le comportement dynamique du système au voisinage de la surface de glissement est essentiellement conditionné par cette dernière. On dit que le système est en régime glissant. Deuxièmement, ce comportement est non seulement robuste, mais aussi insensible aux incertitudes pour lesquelles la commande a été réglée.

La synthèse d'une loi de commande par mode glissant consiste donc à déterminer :

- une hypersurface en fonction des objectifs de commande et des propriétés statiques et dynamiques désirées pour le système bouclé. La dynamique exigée par l'hypersurface doit être compatible avec l'amplitude de commande utile disponible et la dynamique du système en boucle ouverte. Dans le cas contraire, le système ne pourra pas rester sur l'hypersurface, et la propriété d'insensibilité aux perturbations sera perdue.
- la condition de convergence, condition nécessaire et suffisante par laquelle la variable de glissement tend vers zéro.
- une loi de commande discontinue de manière à contraindre les trajectoires d'état du système à atteindre cette hypersurface en temps fini puis à y rester en dépit des incertitudes et des perturbations.

### 3.2. La surface de glissement

Soit un système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$x^{(n)}(t) = f(x, t) + g \cdot u(t) \quad (4.12)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions non linéaires,  $g$  est supposée inversible,  $u$  est l'entrée du système ;  $x$  est la variable d'état du système.

Soit  $x_d$  la consigne désirée et  $e$  l'erreur de poursuite définie par :

$$e = x - x_d \quad (4.13)$$

La formule générale de la surface de glissement est définie en fonction de l'ordre du système comme suit [27]:

$$S(x) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right)^{n-1} e(x) \quad (4.14)$$

où  $n$  : le degré relatif du système par rapport à la sortie  $y(t)$ , qui représente le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la sortie  $y(t)$  par rapport au temps, pour y voir apparaître l'entrée.

### 3.3. Condition d'existence du mode de glissant

Le choix de la fonction de glissement étant fait, la deuxième étape consiste à concevoir une loi de commande qui puisse amener le vecteur d'état à converger vers la surface et y demeurer à  $S(x) = 0$ . Pour cela il faut que la loi de commande soit conçue de telle manière à ce que  $S(x)$  soit attractive.

Pour déterminer la condition d'attractivité, considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(s) = \frac{1}{2} s^2 \quad (4.15)$$

Cette fonction est définie positive. Une condition nécessaire et suffisante pour que la variable de glissement  $s$  tende vers zéro est que la dérivée de  $V(s)$  soit définie négative :

$$\dot{V}(s) = s\dot{s} < 0 \quad (4.16)$$

Cette inégalité est appelée condition d'attractivité qui n'est pas suffisante pour assurer une convergence en temps fini vers la surface. Pour assurer une convergence de  $s$  vers 0 en un temps fini, une condition plus forte doit être respectée. Dans le cas des modes glissants classiques, on utilise généralement la condition d'attractivité non linéaire dite condition de  $\eta$  – *acttrativité* : qui est donnée par :

$$s\dot{s} \leq -\eta|s| < 0 ; \quad \eta > 0 \quad (4.17)$$

### 3.4. Calcul de la commande.

Dans le cadre de notre travail, la commande  $u(t)$  à déterminer est fonction de la vitesse linéaire  $v(t)$  et de la vitesse angulaire  $\omega(t)$  du robot.

Rappelons que l'équation différentielle de notre système est l'équation (4.5).

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + g(x, t) \cdot u(t) + d(t)$$

En considérant que notre système est linéaire et sans perturbation, l'équation (4.5) devient :

$$\dot{x}(t) = g(x, t) \cdot u(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_0 R} & 0 \\ 0 & \frac{L}{I_0 R} \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (4.18)$$

En définissant la surface de glissement  $S(t)$  comme suit,

$$S(t) = \begin{bmatrix} S_1(t) \\ S_1(t) \end{bmatrix} = e_c(t) + \beta \int e_c(t) dt ; \quad \beta > 0 \quad (4.19)$$

où  $e_c(t) = [e_v, e_w]^T = x_c(t) - x(t)$  est la différence entre la vitesse produite par le contrôleur cinématique (vitesse désirée) et la vitesse réelle du robot.

$x = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$  est la vitesse réelle du robot,

$x_c = \begin{pmatrix} v_c \\ \omega_c \end{pmatrix}$  est la sortie du contrôleur cinématique (Figure 17).

Pour que la dynamique du système converge vers la surface de glissement et y demeure indépendamment des perturbations, il faut que dans  $\dot{S}(t) = 0$  la commande s'y trouve.

Alors le système est dans la surface de glissement implique :

$$S(t) = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} e_c(t) \rightarrow 0.$$

En dérivant  $S(t)$  on obtient :

$$\dot{S}(t) = \dot{e}_c(t) + \beta e_c(t)$$

Pour trouver la commande équivalente  $u_{eq}(t)$  il faut résoudre l'équation suivante :

$$\dot{S}(t) = \dot{e}_c(t) + \beta e_c(t) = 0. \quad (4.20)$$

En remplaçant  $\dot{e}_c(t)$  par son expression, l'équation (4.20) devient :

$$\begin{cases} \dot{S}_1(t) = \dot{v}_c(t) - \dot{v}(t) + \beta e_v(t) = 0 \\ \dot{S}_2(t) = \dot{\omega}_c(t) - \dot{\omega}(t) + \beta e_\omega(t) = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

En introduisant (4.3) dans (4.21) on obtient :

$$\begin{cases} \dot{v}_c(t) - \frac{1}{m_0 R} u_1(t) + \beta e_v(t) = 0 \\ \dot{\omega}_c(t) - \frac{L}{I_0 R} u_2(t) + \beta e_\omega(t) = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

La commande équivalente obtenue est :

$$u_{eq}(t) = \begin{cases} u_{eq1}(t) = m_0 R [\dot{v}_c(t) + \beta e_v(t)] \\ u_{eq2}(t) = \frac{I_0 R}{L} [\dot{\omega}_c(t) + \beta e_\omega(t)] \end{cases} \quad (4.23)$$

En remplaçant  $m_0 R$  par  $\gamma$  et  $\frac{I_0 R}{L}$  par  $\alpha$ , l'équation (4.23) devient :

$$u_{eq}(t) = \begin{cases} u_{eq1}(t) = \gamma [\dot{v}_c(t) + \beta e_v(t)] \\ u_{eq2}(t) = \alpha [\dot{\omega}_c(t) + \beta e_\omega(t)] \end{cases} \quad (4.24)$$

$u_{eq}(t)$  est la commande permettant au système de rester sur la surface de glissement.

En tenant compte des perturbations extérieures, l'équation dynamique (4.18) du système à commander devient :

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = \frac{1}{\gamma} u_1(t) + d_1 \\ \dot{\omega}(t) = \frac{1}{\alpha} u_2(t) + d_2 \end{cases} \quad (4.25)$$

Notons que l'équation (4.25) représente la forme linéaire du système soumis à des perturbations, où

$d(t) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$  est la perturbation qui s'ajoute à la commande.  $d$  étant une perturbation non connue mais bornée,  $|d| \leq D$ .

Ainsi la nouvelle loi de commande tenant compte de ces perturbations est :

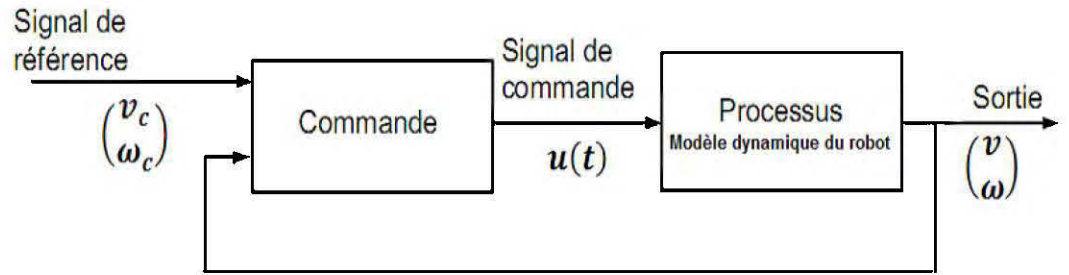
$$u(t) = u_{eq}(t) + u_d(t) \quad (4.26)$$

$$\text{où } u_d(t) = \begin{cases} u_{d1}(t) = k_1 \text{sgn}(S_1) \\ u_{d2}(t) = k_2 \text{sgn}(S_2) \end{cases} \quad (4.27)$$

La commande  $u(t)$  obtenue par mode glissant classique est donnée par :

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = \gamma([\dot{v}_c(t) + \beta e_v(t)] + k_1 \text{sgn}(S_1)) \\ u_2(t) = \alpha([\dot{\omega}_c(t) + \beta e_\omega(t)] + k_2 \text{sgn}(S_2)) \end{cases} \quad (4.28)$$

Notons que la loi de commande donnée dans l'équation (4.28) est une commande non adaptative car on a supposé que les paramètres du système, soient la masse du robot et l'inertie, sont connus. La figure 20 illustre le principe de commande non adaptative.



*Figure 20: Schéma de principe de la commande non adaptative.*

#### 4. La commande par mode glissant adaptatif

Dans la réalité les modèles des systèmes physiques sont caractérisés par des paramètres qui sont peu connus ou variables. Si ces paramètres varient dans un intervalle important, il serait mieux d'employer une loi d'adaptation pour les estimer convenablement.

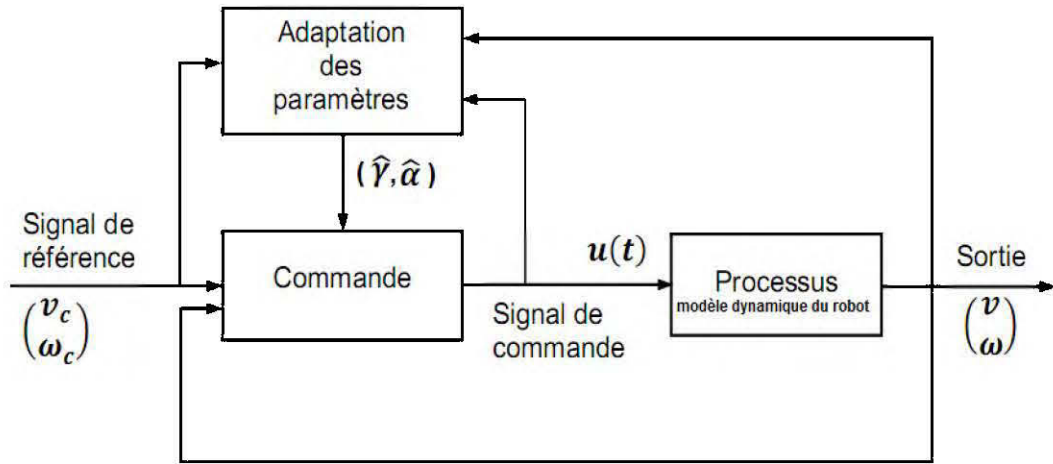
La conception d'une commande adaptative exige la mise au point de trois notions de base :

- Une loi de commande qui permet de répondre aux spécifications désirées, vis-à-vis du comportement du système à commander ;
- Une loi d'adaptation qui détermine la dynamique d'estimation des paramètres inconnus. Elle doit garantir leur convergence vers leurs valeurs respectives, sans affecter le bon fonctionnement de l'ensemble ;
- Une fonction de Lyapunov qui permet de répondre aux exigences des deux notions précédentes et de garantir également la convergence et la stabilité de la structure adaptative en tout temps.



La construction de ce triplet s'effectue donc simultanément. Les trois opérations sont entrelacées, ce qui permet de tenir compte des différents effets, afin de préserver la stabilité du système.

La figure ci-dessous illustre le principe de la commande adaptative.



*Figure 21: Schéma de principe de la commande adaptative.*

La loi de commande par mode glissant adaptatif qui sera développée dans les prochains paragraphes présente deux cas à savoir :

- la commande par mode glissant adaptatif avec gain constant.
- La commande par mode glissant adaptatif avec gain variant dans le temps.

Cette dernière permet de réduire le phénomène de broutement et de compenser les perturbations aléatoires.

#### 4.1. Commande par mode glissant adaptatif avec gain constant

En considérant que le système est soumis à des perturbations et que les paramètres sont inconnus, l'équation (4.18) devient :

$$\dot{x}(t) = [g + \Delta g]u(t) + d(t) \quad (4.29)$$

où  $g = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_0 R} & 0 \\ 0 & \frac{L}{I_0 R} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}$  : une fonction linéaire par rapport aux variables

d'état, inversible et représente la matrice d'entrée du système.

$\Delta g$  représente l'incertitude de  $g$ .  $u(t)$  est la commande d'entrée et  $d(t)$  est la perturbation.

En remplaçant  $g + \Delta g$  par  $\bar{g}$ , l'équation (4.29) devient :

$$\dot{x}(t) = \bar{g}(x, t)u(t) + d(t) \quad (4.30)$$

En se servant des équations (4.21), (4.26), (4.27), et (4.28), la commande  $u(t)$  obtenue par mode glissant du système (4.30) est :

$$u(t) = \bar{g}^{-1} \left( (\dot{x}_c + \beta e_c(t)) + k \operatorname{sgn}(S) \right) \quad (4.31)$$

Considérant que  $g_{\min} \leq \bar{g}(x, t) \leq g_{\max}$  et que le système est soumis à des perturbations, en se basant sur les travaux développés dans [15] et [28] nous proposons une loi de commande adaptative  $u_{\text{adapt}}(t)$  qui prend en compte les variations des paramètres du robot et des perturbations extérieures qui agissent sur le robot.

$$u_{\text{adapt}}(t) = u_{eq} + u_w + u_d \quad (4.32)$$

où

$u_{eq}(t)$  est la commande équivalente du système. Elle est obtenue à partir des équations (4.21) et (4.30).

$$u_{eq}(t) = \hat{g}^{-1} (\dot{x}_c + \beta e_c(t)) \quad (4.33)$$

$\hat{g}$  est l'estimé de  $g$ , et  $\beta > 0$

$u_w(t)$  est la rétro-action, avec

$$u_w(t) = \eta \cdot S(t) \quad (4.34)$$

$S(t)$  est la surface de glissement et  $\eta > 0$  ;

$u_d(t)$  assure la robustesse du système, soit :

$$u_d(t) = k \operatorname{sgn}(S(t)) \quad (4.35)$$

avec  $k > D$  et  $d$  étant une perturbation non connue mais bornée,  $|d| \leq D$ .

Ainsi l'équation (4.32) s'écrit sous la forme :

$$u_{\text{adapt}}(t) = \hat{g}^{-1} \left( (\dot{x}_c + \beta e_c(t)) + \eta S + k \operatorname{sgn}(S) \right) \quad (4.36)$$

La loi de commande adaptative  $u_{\text{adapt}}(t)$  peut encore être écrite sous la forme :

$$u_{\text{adapt}}(t) = \begin{cases} u_{\text{adapt}1}(t) = \hat{\gamma} [\dot{v}_c(t) + \beta e_v(t)] + \eta_1 S_1 + k_1 \operatorname{sgn}(S_1) \\ u_{\text{adapt}2}(t) = \hat{\alpha} [\dot{\omega}_c(t) + \beta e_\omega(t)] + \eta_2 S_2 + k_2 \operatorname{sgn}(S_2) \end{cases} \quad (4.37)$$

où  $\hat{\gamma}$  et  $\hat{\alpha}$  sont respectivement les estimés  $\gamma$  et  $\alpha$  ;

$\eta_1 > 0$ ,  $\eta_2 > 0$  et les perturbations sont bornées par  $D$ . De plus,  $k > D$ .

Déterminons la loi d'adaptation qui permet de calculer  $\hat{g}$ .

En choisissant la fonction de Lyapunov comme suit ;

$$\begin{cases} L_1 = \frac{1}{2}\gamma S_1^2 + \frac{1}{2a}\tilde{\gamma}^2 \\ L_2 = \frac{1}{2}\alpha S_2^2 + \frac{1}{2b}\tilde{\alpha}^2 \end{cases} \quad \text{avec } a > 0 \text{ et } b > 0 \quad (4.38)$$

où  $\begin{cases} \tilde{\gamma} = \hat{\gamma} - \gamma \\ \tilde{\alpha} = \hat{\alpha} - \alpha \end{cases}$  est l'erreur de l'estimé.

Ainsi la dérivée de la fonction de Lyapunov est :

$$\begin{cases} \dot{L}_1 = \gamma \dot{S}_1 S_1 + \frac{1}{a} \tilde{\gamma} \dot{\gamma} \\ \dot{L}_2 = \alpha \dot{S}_2 S_2 + \frac{1}{b} \tilde{\alpha} \dot{\alpha} \end{cases} \quad (4.39)$$

En remplaçant l'équation (4.25) dans l'équation (4.21), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{S}_1(t) = \dot{v}_c(t) - \left[ \frac{1}{\gamma} u_1(t) + d_1 \right] + \beta e_v(t) = 0 \\ \dot{S}_2(t) = \dot{\omega}_c(t) - \left[ \frac{1}{\alpha} u_2(t) + d_2 \right] + \beta e_\omega(t) = 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

En remplaçant l'équation (4.40) dans l'équation (4.39), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{L}_1 = \gamma S_1 \left[ (\dot{v}_c(t) + \beta e_v(t)) - \left( \frac{1}{\gamma} u_1(t) + d_1 \right) \right] + \frac{1}{a} \tilde{\gamma} \dot{\gamma} \\ \dot{L}_2 = \alpha S_2 \left[ (\dot{\omega}_c(t) + \beta e_\omega(t)) - \left( \frac{1}{\alpha} u_2(t) + d_2 \right) \right] + \frac{1}{b} \tilde{\alpha} \dot{\alpha} \end{cases} \quad (4.41)$$

En substituant  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  par les expressions de  $u_{adapt1}(t)$  et  $u_{adapt2}(t)$  de l'équation (4.37) dans l'équation (4.41), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{L}_1 = S_1(\gamma - \hat{\gamma})(\dot{v}_c + \beta e_v) - \eta_1 S_1^2 - k_1 |S_1| - d_1 S_1 + \frac{1}{a} \tilde{\gamma} \dot{\gamma} \\ \dot{L}_2 = S_2(\alpha - \hat{\alpha})(\dot{\omega}_c + \beta e_\omega) - \eta_2 S_2^2 - k_2 |S_2| - d_2 S_2 + \frac{1}{b} \tilde{\alpha} \dot{\alpha} \end{cases} \quad (4.42)$$

En posant que :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\gamma}} = -a S_1 (\dot{v}_c + \beta e_v) \\ \dot{\hat{\alpha}} = -b S_2 (\dot{\omega}_c + \beta e_\omega) \end{cases} \quad (4.43)$$

L'équation (4.42) devient :

$$\begin{cases} \dot{L}_1 = -\eta_1 S_1^2 - k_1 |S_1| - d_1 S_1 < -\eta_1 S_1^2 \leq 0 \\ \dot{L}_2 = -\eta_2 S_2^2 - k_2 |S_2| - d_2 S_2 < -\eta_2 S_2^2 \leq 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

Pour  $|d| \leq D$  et  $k > D$  avec  $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ , la stabilité asymptotique est vérifiée.

Pour estimer les valeurs de  $\hat{\gamma}$  et  $\hat{\alpha}$ , nous utilisons un estimateur de projection discontinue proposé dans [28].

$$\hat{\gamma} = Proj_{\hat{\gamma}}[-a S_1 (\dot{v}_c + \beta e_v)]$$

$$\text{où } Proj_{\hat{\gamma}}(\bullet) = \begin{cases} 0, & \text{if } \hat{\gamma} = \gamma_{max} \text{ and } (\bullet) > 0 \\ 0, & \text{if } \hat{\gamma} = \gamma_{min} \text{ and } (\bullet) > 0 \\ \bullet, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.45)$$

et

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\alpha}} &= Proj_{\hat{\alpha}}[-bS_2(\dot{\omega}_c + \beta e_\omega)] \\ \text{où } Proj_{\hat{\alpha}}(\bullet) &= \begin{cases} 0, & \text{if } \hat{\alpha} = \alpha_{max} \text{ and } (\bullet) > 0 \\ 0, & \text{if } \hat{\alpha} = \alpha_{min} \text{ and } (\bullet) > 0 \\ \bullet, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.46)$$

## 4.2. Commande par mode glissant adaptatif avec gain variant dans le temps

Malgré les propriétés prouvées du contrôleur par mode glissant, le terme discontinu dans la loi de commande globale introduit le phénomène de broutement (chattering).

Pour éliminer les effets indésirables de ce phénomène, plusieurs méthodes ont été proposées parmi lesquels les travaux effectués par [29] nous ont permis d'élaborer une loi de commande adaptative avec un gain adaptatif. Pour des systèmes non-linéaires, ce gain est fonction du terme non-linéaire de l'équation et de la surface de glissement.

Considérant l'équation du système donnée par (4.5):

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t) * u(t) + d(t)$$

Sans perturbation, cette équation devient :

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t) * u(t) \quad (4.47)$$

où  $t \in \mathbb{R}^+$  est le temps,  $u(t) \in \mathbb{R}^2$  est le signal d'entrée,  $x \in \chi$  le vecteur d'état et  $x_e = 0$  est le point d'équilibre.

$f(x, t)$  et  $g$  sont des fonctions non linéaires et bornées dans  $\chi \times \mathbb{R}^+$ , avec  $g \neq 0$  et pour tout  $(x, t) \in \chi \times \mathbb{R}^+$ .

En désignant  $s(x, t)$  comme surface de glissement,

$$\begin{aligned} \dot{S}(x, t) &= \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} \dot{x} \\ \dot{S}(x, t) &= \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} f(x, t) + \frac{\partial S}{\partial x} g(x, t) \cdot u(t) \end{aligned}$$

En posant

$$\Psi(x, t) = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} f(x, t) \quad \text{et} \quad \Gamma(x, t) = \frac{\partial S}{\partial x} g(x, t)$$

On obtient la dérivée de la surface de glissement égale à :

$$\dot{S}(x, t) = \Psi(x, t) + \Gamma(x, t) * u(t) \quad (4.48)$$

où  $\Psi(x, t)$  et  $\Gamma(x, t)$  sont bornées,  $\Gamma(x, t) > 0$  pour tout  $(x, t) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^+$ .

Supposons,

$$\sup_{(x,t)} |\Psi| \leq \bar{\Psi} \quad \text{et} \quad \underline{\Gamma} \leq \inf_{(x,t)} \Gamma \quad (4.49)$$

La loi de contrôle discontinue  $u(t)$  proposée par [29] est :

$$u(t) = -K(t) * \text{sgn}(S) \quad (4.50)$$

où  $K(t)$  est un gain adaptatif permettant de compenser les perturbations aléatoires.

En égalisant  $\dot{S}(x, t)$  à 0 on obtient :

$$u(t) = -\frac{\Psi(x,t)}{\Gamma(x,t)} = -K(t) * \text{sgn}(S) \quad (4.51)$$

$$\text{Ainsi } K(t^*) \geq \frac{\Psi(x,t)}{\Gamma(x,t)} \text{sgn}(S), \quad \forall t > t^* \quad (4.52)$$

Dans notre cas, la surface de glissement est définie par :

$$S(t) = \begin{bmatrix} S_1(t) \\ S_1(t) \end{bmatrix} = e_c(t) + \beta \int e_c(t) dt \quad (4.53)$$

Ce qui implique que le gain  $K(t)$  variant dans le temps est :

$$K(t) = \begin{cases} K_1(t) = \gamma[\dot{v}_c(t) + \beta e_v(t)] \\ K_2(t) = \alpha[\dot{\omega}_c(t) + \beta e_\omega(t)] \end{cases} \quad (4.54)$$

La nouvelle loi de commande adaptative avec gain variant dans le temps est :

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = K_1(t) * \text{sgn}(S_1) \\ u_2(t) = K_2(t) * \text{sgn}(S_2) \end{cases} \quad (4.55)$$

## **Conclusion**

Après avoir présenté l'architecture de contrôle du robot à commander, nous avons développé dans un premier temps la loi de commande par mode glissant classique du système étudié ensuite, étant donné que les paramètres du système sont inconnus, nous avons adapté la loi de commande afin de prendre en compte les incertitudes et les perturbations. Dans un dernier temps, afin d'améliorer d'avantage la loi de commande et d'atténuer les phénomènes de broutement nous avons utilisé un gain adaptatif.

Dans le prochain chapitre nous allons présenter les résultats issus de l'application de ces lois de commande sur le robot. Etant donné qu'il n'est pas possible de mesurer les perturbations dues au phénomène de broutement, une solution permettant de venir à bout de ce problème est l'utilisation d'un observateur de perturbations (Chapitre 6).

## **CHAPITRE 5 : SIMULATIONS ET INTERPRETATIONS**

### **Introduction**

#### **1. Présentation de l'environnement de travail**

- 1.1. Caractéristiques du robot
- 1.2. Trajectoires
- 1.3. Environnement de travail et schéma de commande

#### **2. Simulations**

##### **2.1. Simulations dans la boucle cinématique**

##### **2.2. Simulations de la commande par mode glissant classique dans la boucle cinématique et dynamique.**

- 2.2.1. Cas du modèle dynamique linéaire
- 2.2.2. Cas du modèle dynamique non-linéaire
- 2.2.3. Cas du modèle dynamique non-linéaire avec paramètres inconnus

##### **2.3. Simulations de la commande par mode glissant adaptatif dans la boucle cinématique et dynamique**

Cas du modèle dynamique non-linéaire avec paramètres inconnus

### **Conclusion**

## Introduction

Durant les dernières décennies, la commande du mouvement de robots mobiles a trouvé une attention considérable. Les travaux entrepris par plusieurs chercheurs étaient essentiellement basés sur le problème de génération de trajectoires d'un point de vue cinématique c'est-à-dire en considérant uniquement les vitesses linéaires et angulaires comme seules grandeurs. Compte tenu de la dynamique du système, des nouvelles lois de commandes non-linéaires ont été développées parmi lesquelles la commande par mode glissant. Dans cette partie du travail, les paramètres du robot utilisés dans les simulations seront présentés dans un premier temps, ensuite viendra les résultats des différentes simulations et leurs interprétations. Les simulations seront faites selon deux schémas de commande à savoir : schéma de commande en boucle cinématique (Figure 22) et schéma de commande en boucles cinématique et dynamique (Figure 23). Différentes trajectoires seront simulées afin de mettre en évidence l'efficacité des lois de commande élaborées.

### 1. Présentation de l'environnement de travail

#### 1.1. Caractéristiques du robot

Le modèle du robot utilisé dans notre simulation est un robot de type unicycle actionné par deux roues indépendantes, il possède éventuellement des roues folles pour assurer sa stabilité mécanique. Son centre de rotation est situé sur l'axe reliant les deux roues motrices. C'est un robot non-holonome. En effet, il est impossible de le déplacer dans une direction perpendiculaire aux roues de locomotion. Sa commande est simple, il est facile de le déplacer d'un point à un autre par une suite de rotations simples et de lignes droites.

Les différents paramètres du robot utilisé dans la simulation sont les suivants [30]:

Masse de la plate-forme :  $m_c = 17 \text{ kg}$

Masse de la roue :  $m_w = 0.5 \text{ kg}$

Rayon de la roue :  $r = 0.095 \text{ m}$

Mi-distance entre les deux roues :  $L = 0.24 \text{ m}$

Distance entre le point milieu des deux roues et le centre de gravité du



robot :  $d= 0.05 \text{ m}$

Inertie par rapport au centre de gravité :  $I_c= 0.537 \text{ kg.m}^2$

Inertie par rapport au diamètre de la roue :  $I_m= 0.0011 \text{ kg.m}^2$

Inertie par rapport à l'axe de la roue :  $I_w= 0.0023 \text{ kg.m}^2$

Masse totale du robot:  $m=m_c+2*m_w= 18 \text{ kg}$

Inertie du robot :  $I= I_c+ m_c*d^2+2* m_w*L^2+2* I_m= 0.6393 \text{ kg.m}^2$

## 1.2. Environnement de travail et schéma de commande

Les simulations ont été réalisées avec le logiciel Matlab/Simulink R2017a®. Deux schémas de commande ont été utilisés pour réaliser les simulations. La figure 22 représente le schéma de commande en boucle cinématique du robot mobile, tandis que la figure 23 représente le schéma de commande en boucles cinématique et dynamique (deux boucles imbriquées).

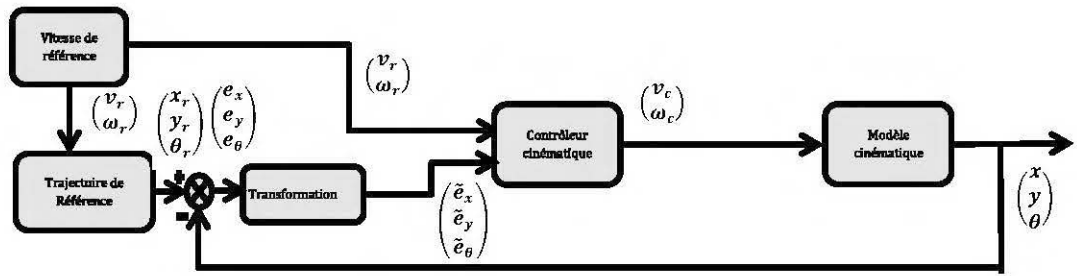


Figure 22: Schéma de commande en boucle cinématique.

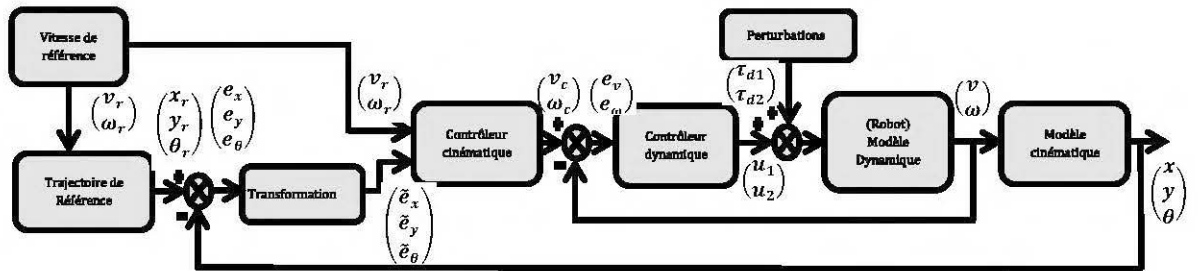


Figure 23: Schéma de commande en boucles cinématique et dynamique.

### 1.3. Trajectoires

Tout au long de ce travail, plusieurs simulations ont été faites avec différentes trajectoires afin de mieux cerner les avantages et les défauts de la loi de commande élaborée. Les trajectoires sur lesquelles nous avons réalisées nos simulations sont les suivantes :

#### 1.3.1 Une droite

$$\text{Trajectoire (1)} \begin{cases} x_r(t) = t \\ y_r(t) = 3 \\ \theta_r(t) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Trajectoire (2)} \begin{cases} x_r(t) = t \\ y_r(t) = t \\ \theta_r(t) = \pi/4 \end{cases}$$

$$\text{Position du robot à l'instant } = 0, \quad P_0 = \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$$

#### 1.3.2 Un cercle

$$\text{Trajectoire (3)} \begin{cases} x_r(t) = (v_r/\omega_r) * \cos(\omega_r * t - \pi/2) \\ y_r(t) = (v_r/\omega_r) * \sin(\omega_r * t - \pi/2) \\ \theta_r(t) = t \end{cases} \quad \text{avec} \quad P_0 = \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ \theta_0 = \pi/2 \end{cases}$$

#### 1.3.3 Une sinusoïde

$$\text{Trajectoire (4)} \begin{cases} x_r(t) = t \\ y_r(t) = 0.5 + 0.25 * \sin(0.3 * \pi * t) \\ \theta_r(t) = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad P_0 = \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0.5 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Trajectoire (5)} \begin{cases} x_r(t) = t \\ y_r(t) = 0.5 + 0.25 * \sin(0.3 * \pi * t) \\ \theta_r(t) = 0.25 * \sin(0.3 * \pi * t + 0.5 * \pi) \end{cases} \quad \text{avec} \quad P_0 = \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0.5 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$$

## 2. Simulations.

A chaque résultat de la simulation, plusieurs grandeurs ont été enregistrées telles que : les vitesses angulaires et linéaires, et le couple appliqué aux roues.

### 2.1. Simulations dans la boucle cinématique

Le schéma de commande correspondant à cette simulation est présenté dans la figure 22.

#### a) Trajectoire N° 1 : Droite

$$\text{Trajectoire (1)} = \begin{cases} x_r(t) = t \\ y_r(t) = 3 \\ \theta_r(t) = 0 \end{cases} \quad P_0 = \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 5 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vitesses de référence : } \begin{cases} v_r = 3 \text{ m/s} \\ \omega_r = 0 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Paramètres du contrôleur cinématique (Eq. 4.8) :

$$k_x = 32 \text{ s}^{-1} ; k_y = 0.064 \text{ m}^{-1} ; k_\theta = 0.2 \text{ m}^{-1}$$

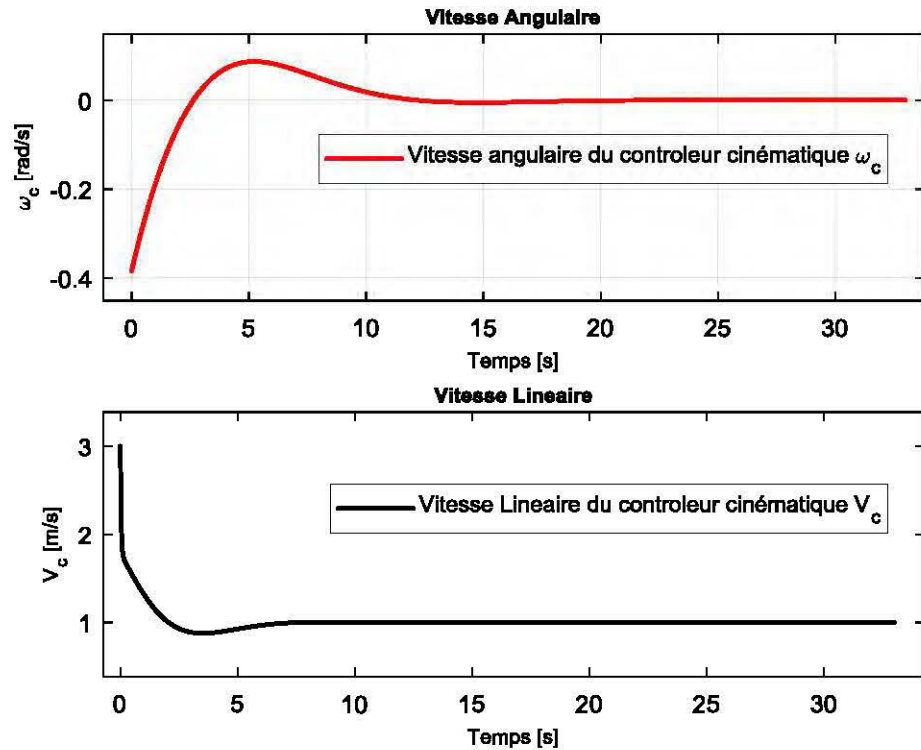


Figure 24: Courbes des vitesses pour le modèle cinématique du robot.

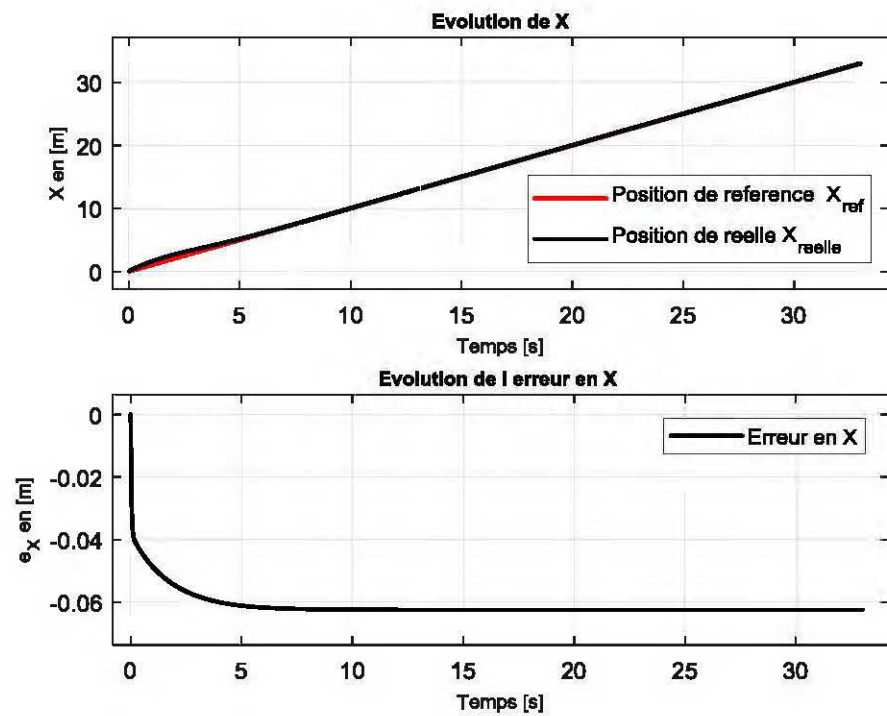


Figure 25: Position en x, et son erreur.

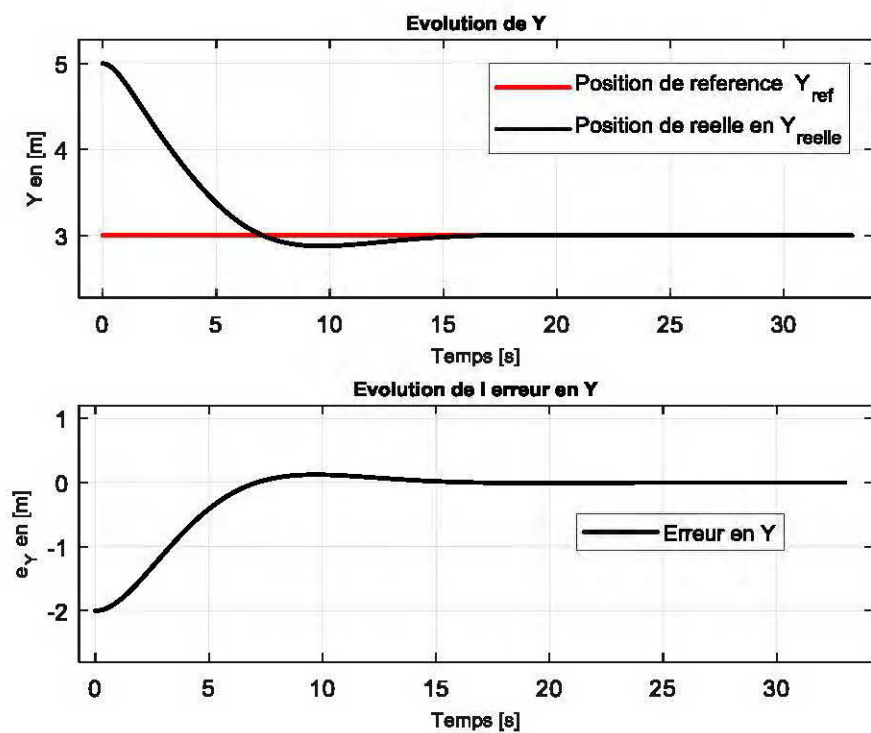


Figure 26: Position en y, et son erreur.

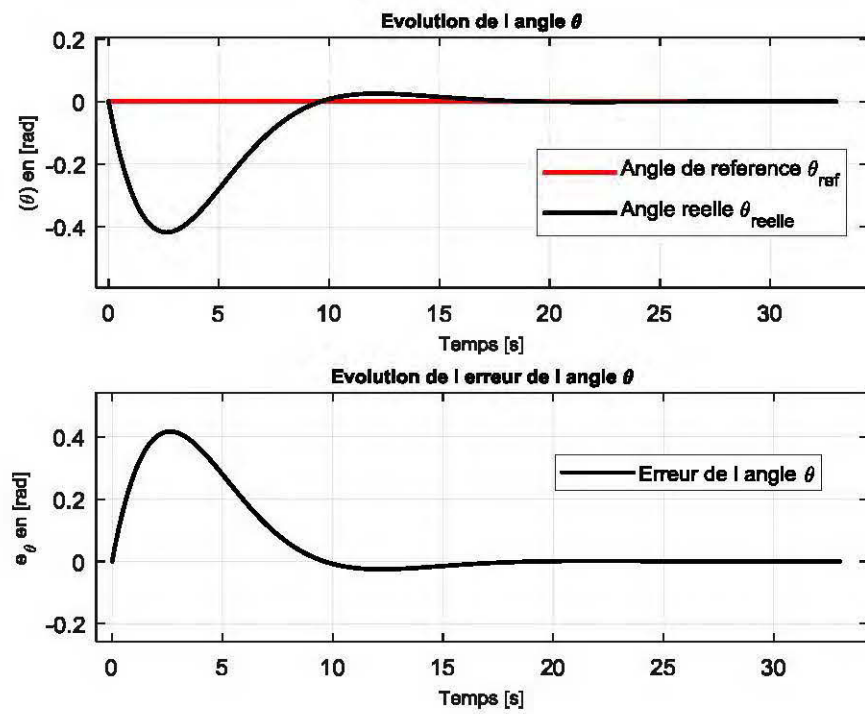


Figure 27: Angle  $\theta$  et son erreur.

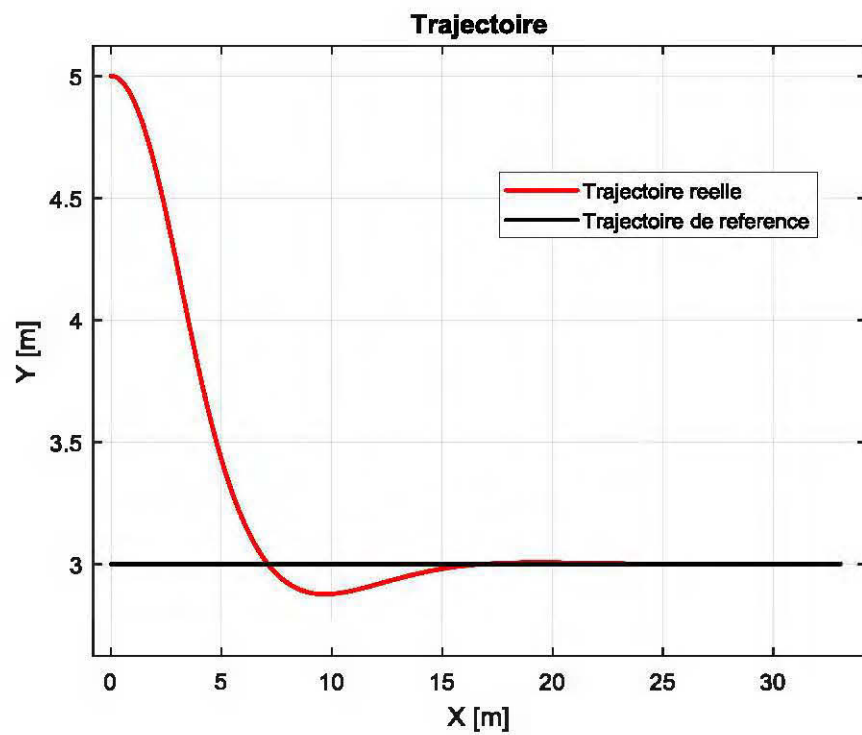


Figure 28: Trajectoire de référence et trajectoire suivie par le robot.

## Interprétations

Les figures 24 et 28 représentent respectivement l'évolution des vitesses et de la trajectoire du robot en fonction du temps. Avec pour vitesse de référence  $V_r = 3m/s$  et  $\omega_r = 0 rad/s$ , le contrôleur cinématique calcule les vitesses nécessaires permettant au robot d'atteindre la trajectoire de référence. Après 15 secondes, le contrôleur cinématique stabilise les vitesses autour de  $V_c = 1m/s$  et  $\omega_c = 0 rad/s$  (Fig.24). A partir des figures 25, 26 et 27, on peut observer l'évolution de la position en  $x$ ,  $y$  et  $\theta$  ainsi que les erreurs sur la position du robot. L'erreur tend vers 0 lorsque le temps  $t$  tend vers l'infini.

### b) Trajectoire N°3 : Cercle

$$\begin{cases} x_r(t) = (v_r/\omega_r) * \cos(\omega_r * t - 0.5 * \pi) \\ y_r(t) = (v_r/\omega_r) * \sin(\omega_r * t - 0.5 * \pi) \\ \theta_r(t) = t \end{cases} \quad \text{avec} \quad P_0 = \begin{cases} x_0 = -0.5 \\ y_0 = -0.5 \\ \theta_0 = -\pi/4 \end{cases}$$

Vitesses de référence :  $\begin{cases} v_r = 1 m/s \\ \omega_r = 1 rad/s \end{cases}$

Paramètres du contrôleur cinématique :

$$k_x = 1.15s^{-1} ; k_y = 20m^{-1} ; k_\theta = 1m^{-1}$$

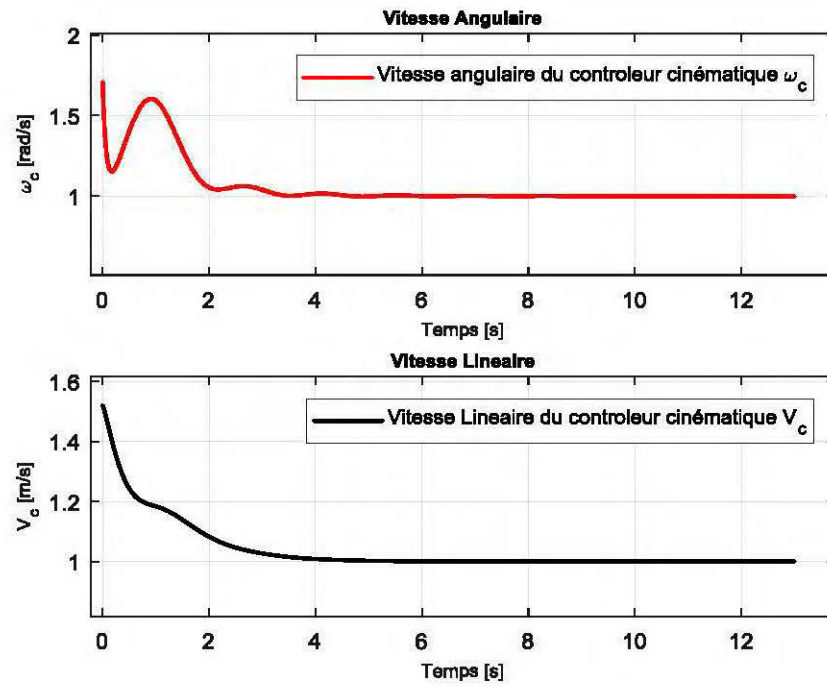


Figure 29: Courbes des vitesses pour le modèle cinématique du robot

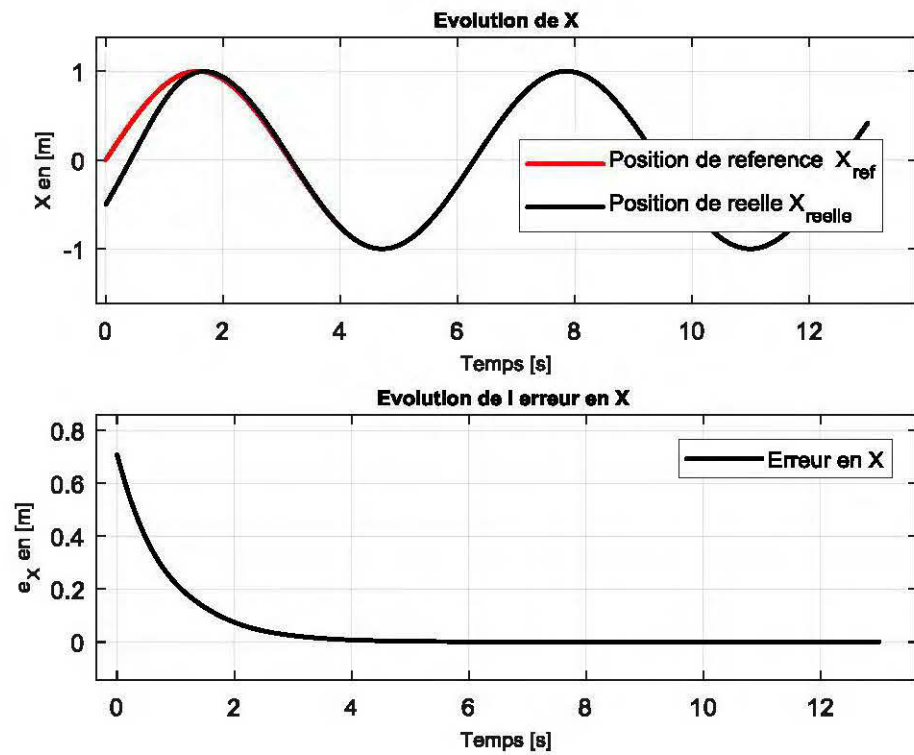


Figure 30: Position en x, et son erreur.

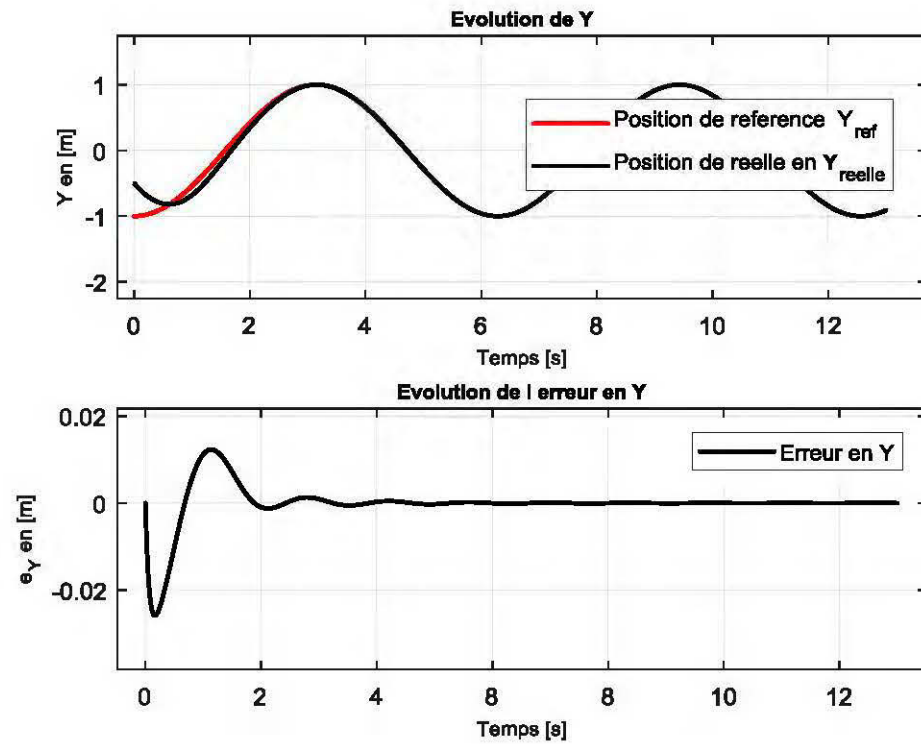


Figure 31: Position en y, et son erreur.

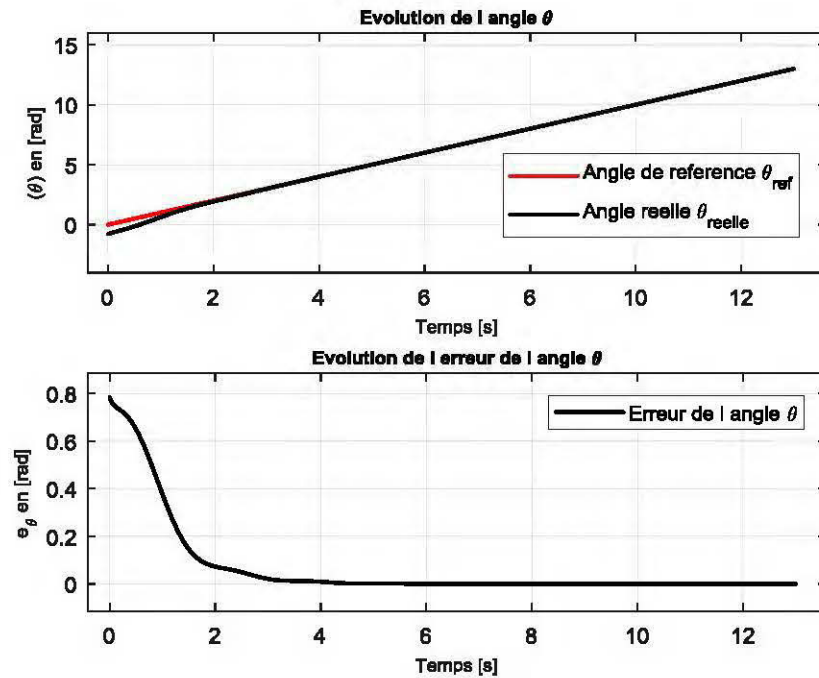
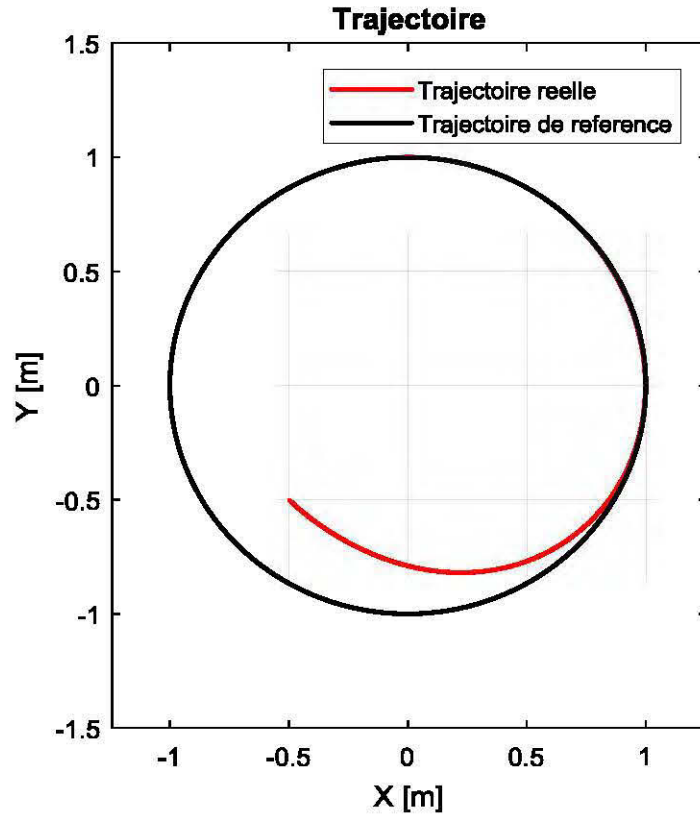


Figure 32: Angle  $\theta$  et son erreur





*Figure 33: Trajectoire de référence et trajectoire suivie par le robot*

### **Interprétations des résultats**

Les figures 29 et 33 représentent respectivement les courbes d'évolution des vitesses et de la trajectoire cartésienne du robot. Les vitesses de références imposées sont  $V_r = 1m/s$  et  $\omega_r = 1rad/s$ . Le robot mobile part de la position de référence  $P_0 = (-0.5; -0.5; 0)$ . Après 3 secondes, le robot suit la trajectoire de référence. Notons que les gains  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_\theta$  influencent sur la vitesse du robot. Les figures 30, 31 et 32 indiquant l'évolution de la position du robot en  $x$ ,  $y$  et  $\theta$  montrent que le robot suit effectivement la trajectoire de référence.

## 2.2. Simulation de la commande par mode glissant classique dans la boucle cinématique et dynamique

Le schéma de commande correspondant à cette simulation est présenté dans la figure 23.

### 2.2.1. Cas du modèle dynamique linéaire.

#### a) Trajectoire 1

$$\begin{cases} x_r(t) = t \\ y_r(t) = 3 \\ \theta_r(t) = 0 \end{cases} \text{ avec } P_0 = \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -1 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$$

Paramètre du contrôleur dynamique (Eq. 4.19) :

$\beta = 50$  (pente de la surface de glissement).

Vitesses de référence :  $\begin{cases} v_r = 0.5 \text{ m/s} \\ \omega_r = 0 \text{ rad/s} \end{cases}$

Paramètres du contrôleur cinématique :

$k_x = 8 \text{ s}^{-1}$  ;  $k_y = 0.60 \text{ m}^{-1}$  ;  $k_\theta = 2 \text{ m}^{-1}$

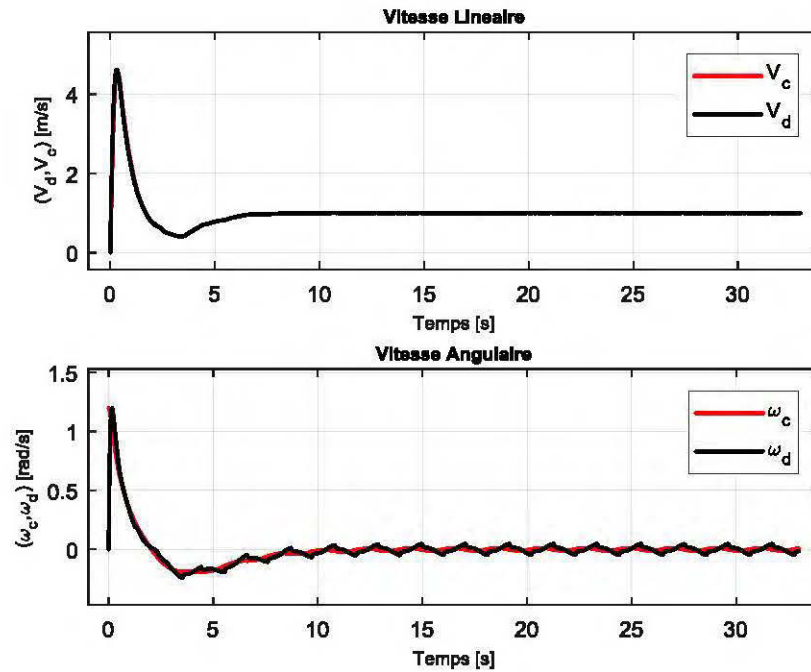


Figure 34: Courbes des vitesses pour le modèle linéaire du robot.

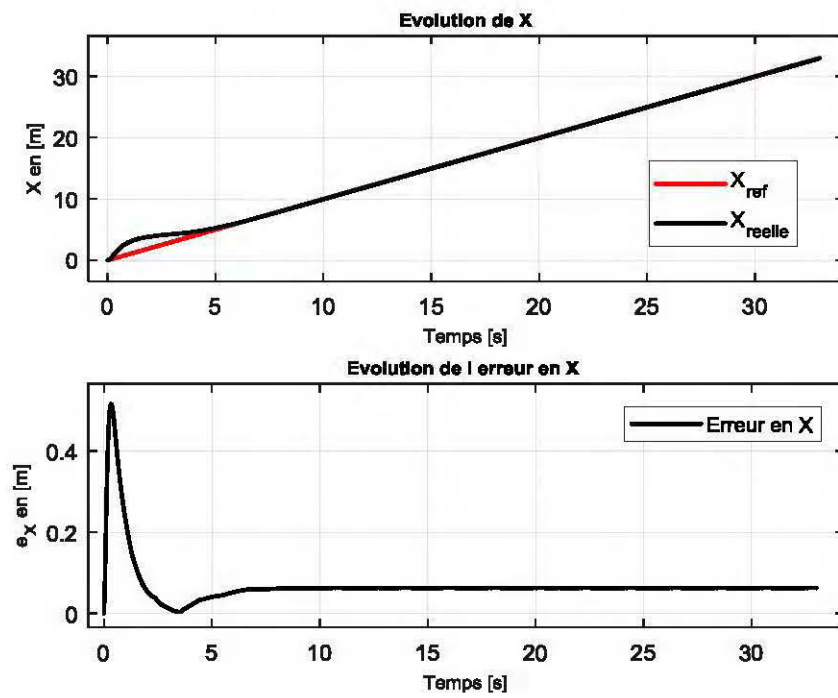


Figure 35: Position en  $x$  et son erreur.

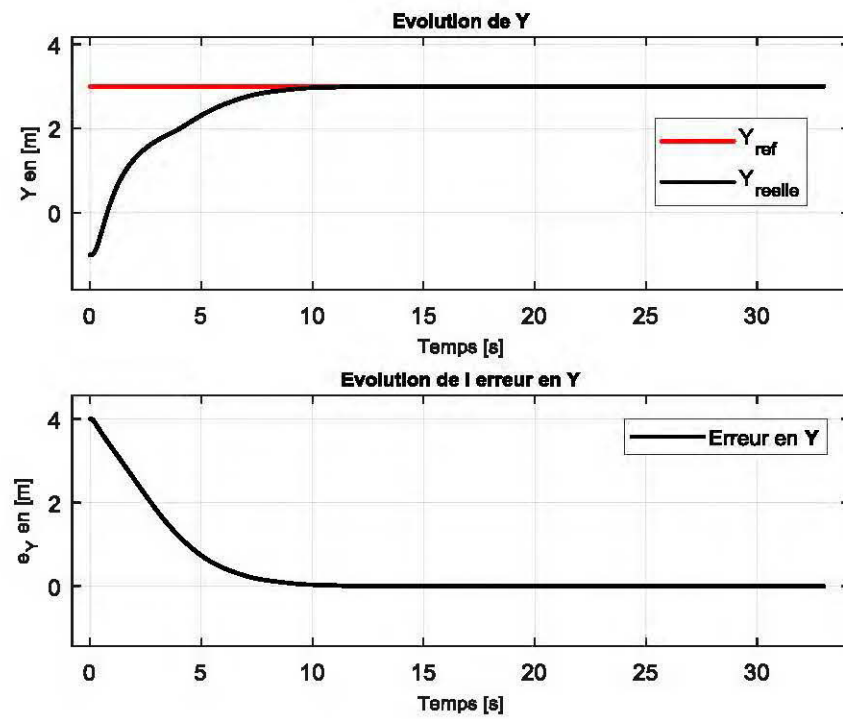


Figure 36: Position en  $y$  et son erreur.

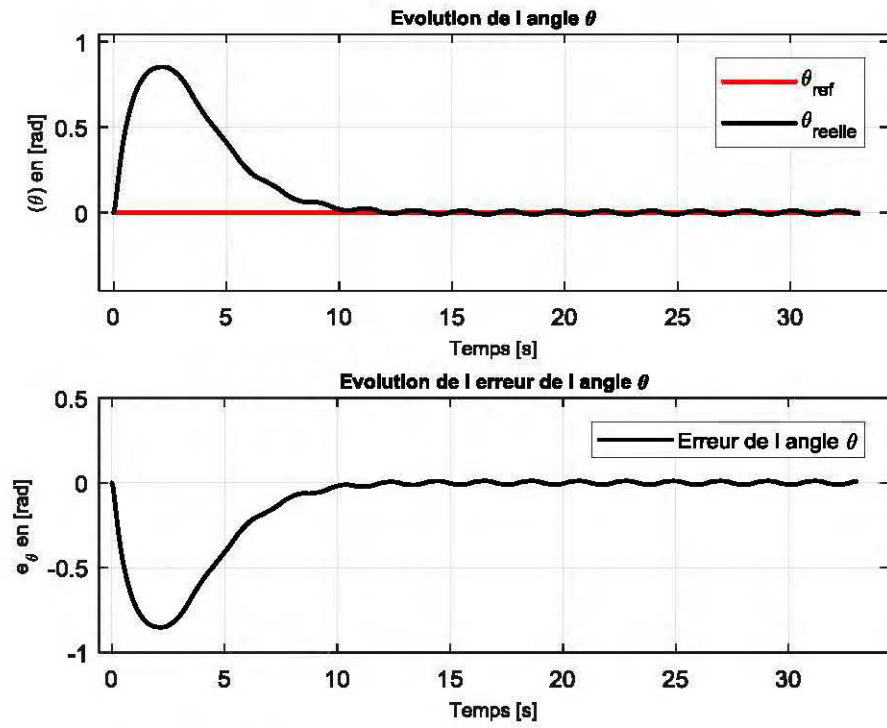


Figure 37: Angle  $\theta$  et son erreur.

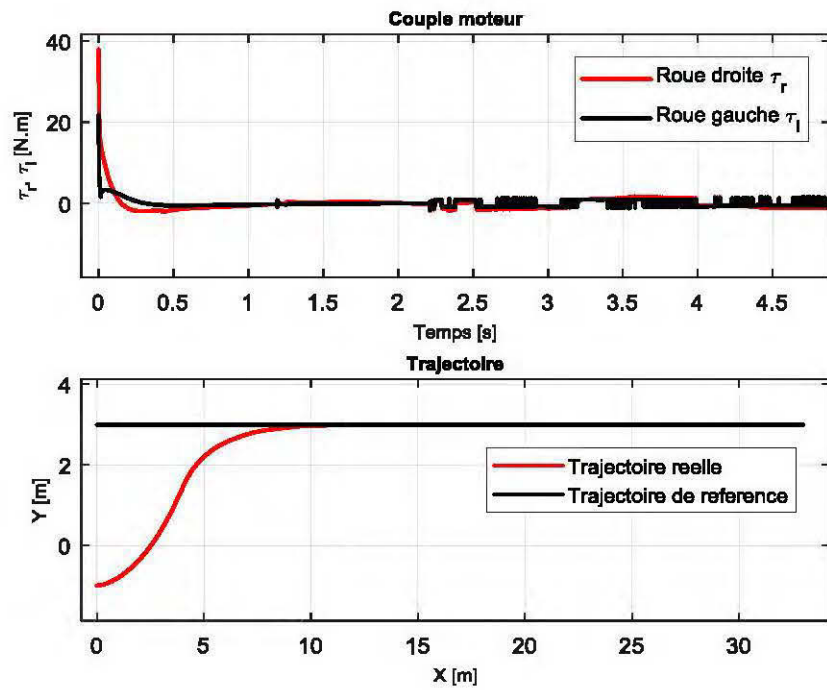


Figure 38: Couples moteurs et Trajectoire cartésienne.

### Interprétation des résultats

Dans cette partie du travail, les simulations ont été faites sur la boucle cinématique et dynamique (Figure 23) avec un modèle dynamique linéaire. Le contrôleur dynamique utilisé ici est basé sur le mode glissant classique. La trajectoire choisie est rectiligne (Trajectoire N°1). Les figures 34, 35, 36, 37 et 38 indiquent l'évolution des vitesses, de la position en  $x, y$  et  $\theta$  et du couple moteur des roues gauche et droite du robot respectivement.

Après 10 secondes, le robot suit la trajectoire de référence comparativement à la simulation en boucle cinématique où on observe dans la figure 25 une erreur non nulle qui reste constante ( $\Delta_x = 0.06m$ ). Cela est certainement dû aux gains des contrôleurs. Mais néanmoins, le robot suit la trajectoire de référence. Sur la courbe de la figure 38, on peut voir que le couple de démarrage du moteur est de 40N.m.

#### **b) Trajectoire N°2.**

$$\begin{cases} x_r(t) = t \\ y_r(t) = t \\ \theta_r(t) = \pi/4 \end{cases} \quad \text{avec } P_0 = \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -3 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$$

Paramètres du contrôleur dynamique :

$$\beta = 45$$

$$\text{Vitesses de référence : } \begin{cases} v_r = 1 \text{ m/s} \\ \omega_r = 0 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Paramètres du contrôleur cinématique :

$$k_x = 8s^{-1} ; k_y = 0.60m^{-1} ; k_\theta = 2m^{-1}$$

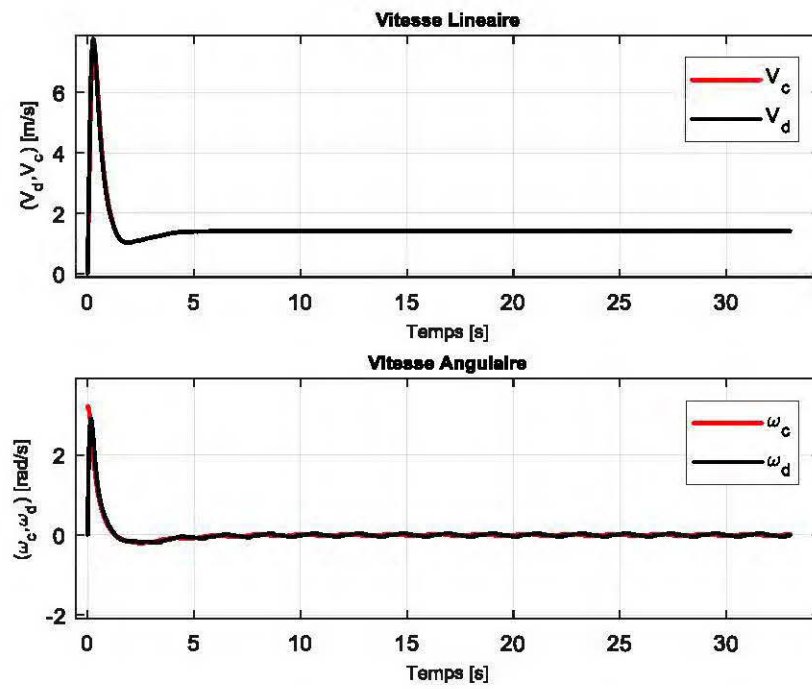


Figure 39: Courbes des vitesses pour le modèle linéaire du robot.

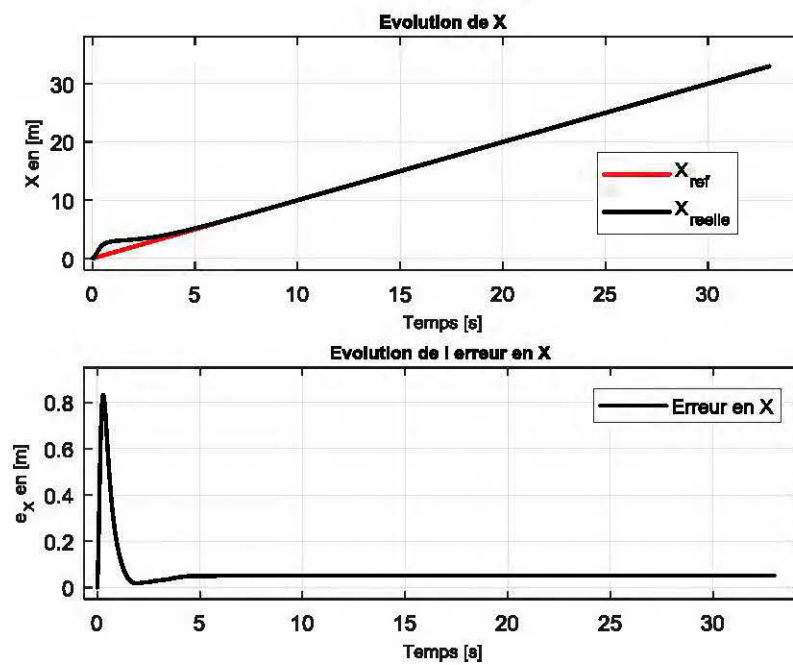


Figure 40: Position en x et son erreur.

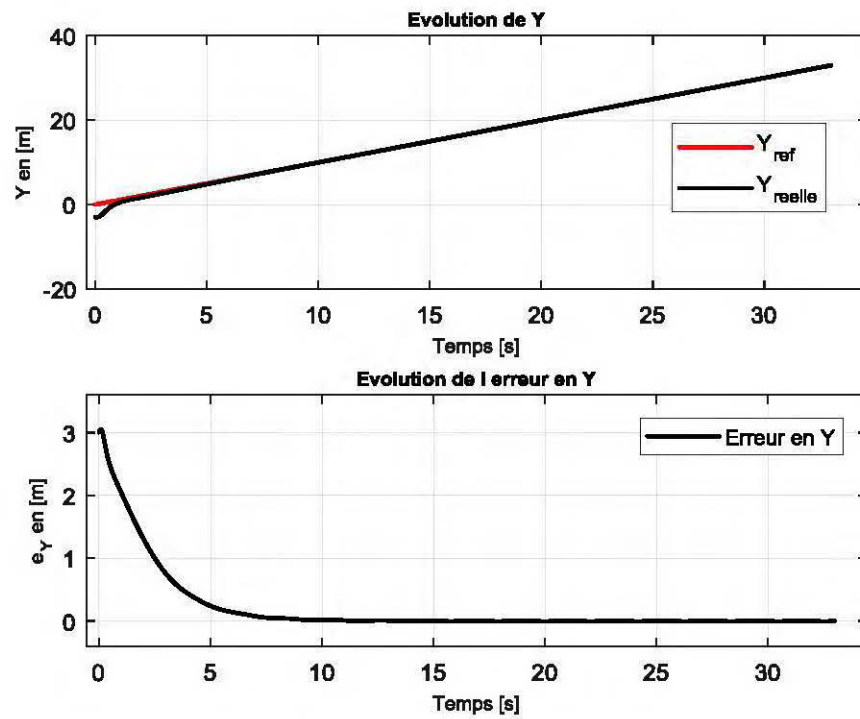


Figure 41: Position en  $y$  et son erreur.

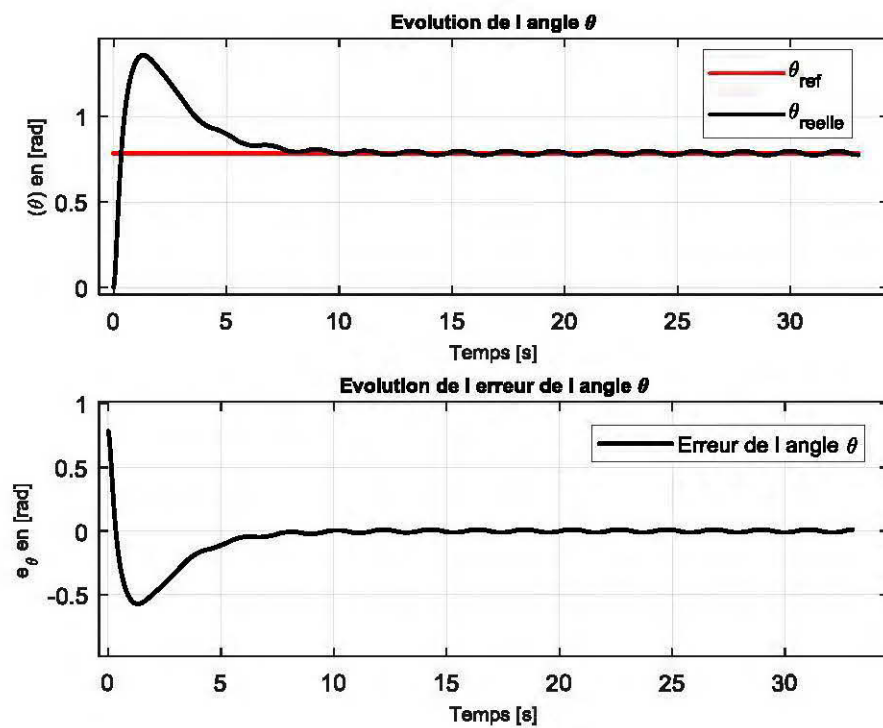
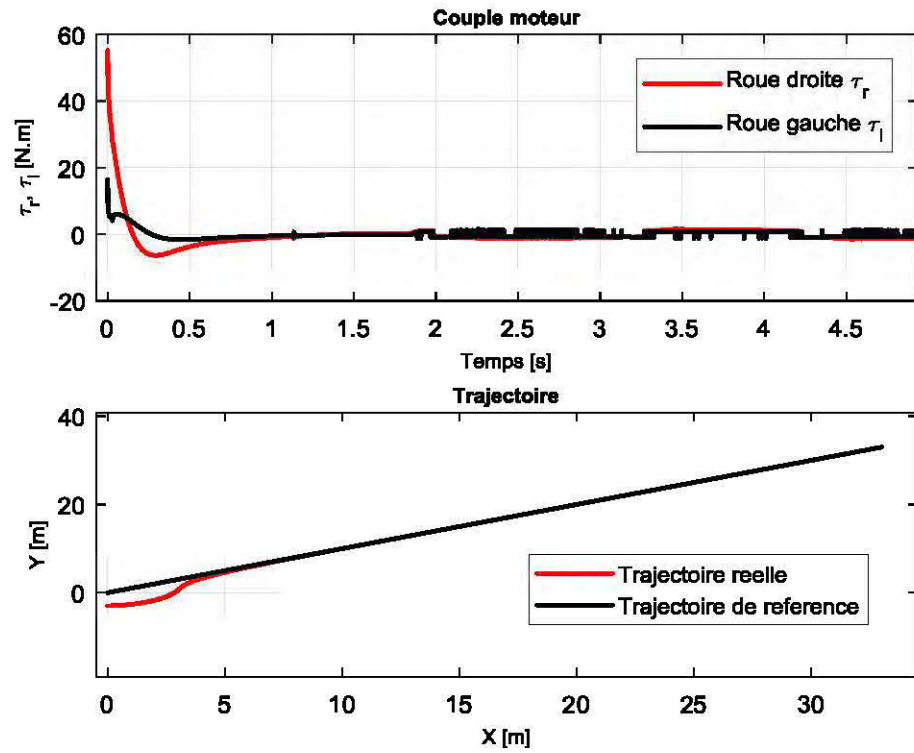


Figure 42: Angle  $\theta$  et son erreur.



*Figure 43: Couples moteurs et trajectoire cartésienne.*

### Interprétations des résultats

La trajectoire imposée au robot est une trajectoire rectiligne avec une déviation d'un angle de  $\frac{\pi}{4}$  comme l'indiquent les paramètres de simulation. Les contrôleurs cinématique et dynamique permettent de calculer respectivement des vitesses et des couples. Les figures 39, 40, 41, 42 et 43 présentent le comportement du robot lors de son déplacement le long de la trajectoire. On observe une erreur  $\Delta_x = 0.05m$  qui reste constante malgré la convergence. On peut également noter que l'amplitude maximale du couple moteur est située entre (0 et 55) N.m.



c) Trajectoire N°3

$$\begin{cases} x_r(t) = (v_r/\omega_r) * \cos(\omega_r * t - \pi/2) \\ y_r(t) = (v_r/\omega_r) * \sin(\omega_r * t - \pi/2) \\ \theta_r(t) = t \end{cases} \quad \text{avec} \quad P_0 = \begin{cases} x_0 = -0.5 \\ y_0 = -0.5 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$$

Paramètres du contrôleur dynamique :

$$\beta = 45$$

$$\text{Vitesses de référence : } \begin{cases} v_r = 1 \text{ m/s} \\ \omega_r = 1 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Paramètres du contrôleur cinématique :

$$k_x = 1.15 \text{ s}^{-1} ; k_y = 12 \text{ m}^{-1} ; k_\theta = 1 \text{ m}^{-1}$$

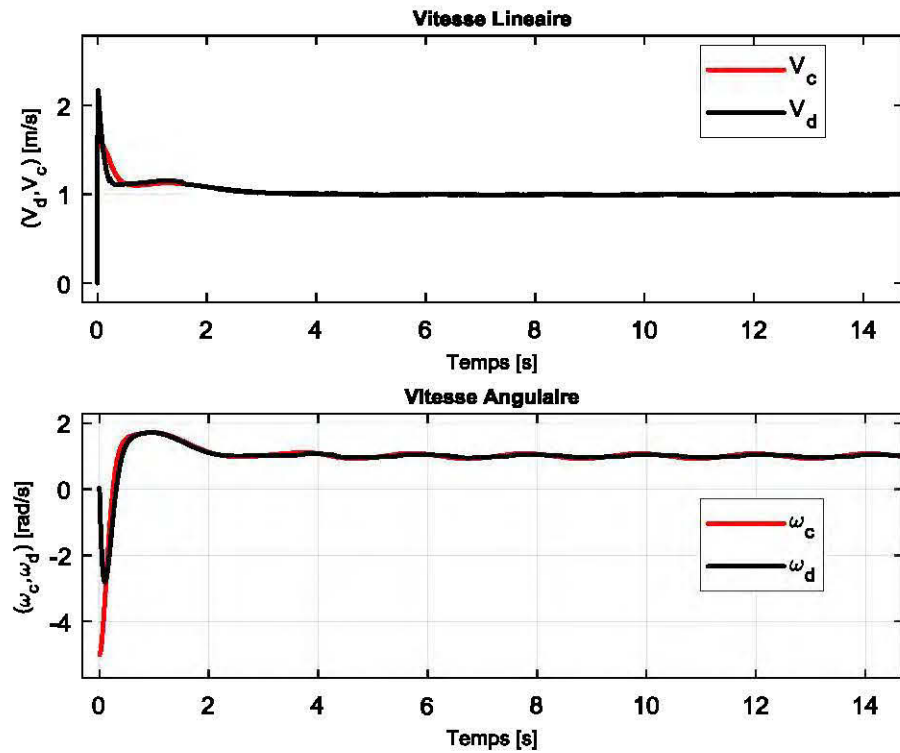


Figure 44: Courbes des vitesses pour le modèle linéaire du robot.

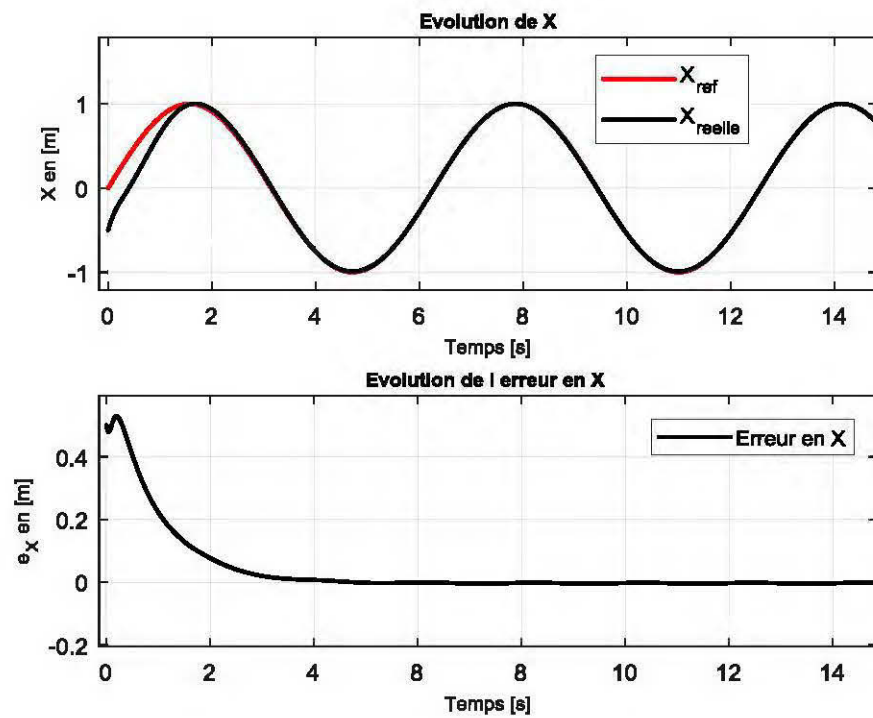


Figure 45: Position en  $x$  et son erreur.

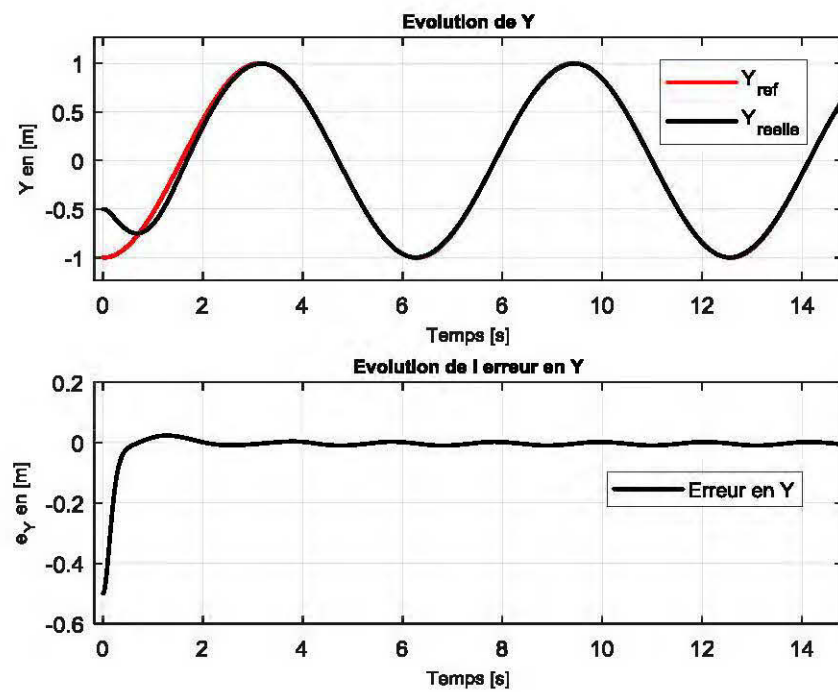


Figure 46: Position en  $y$  et son erreur.

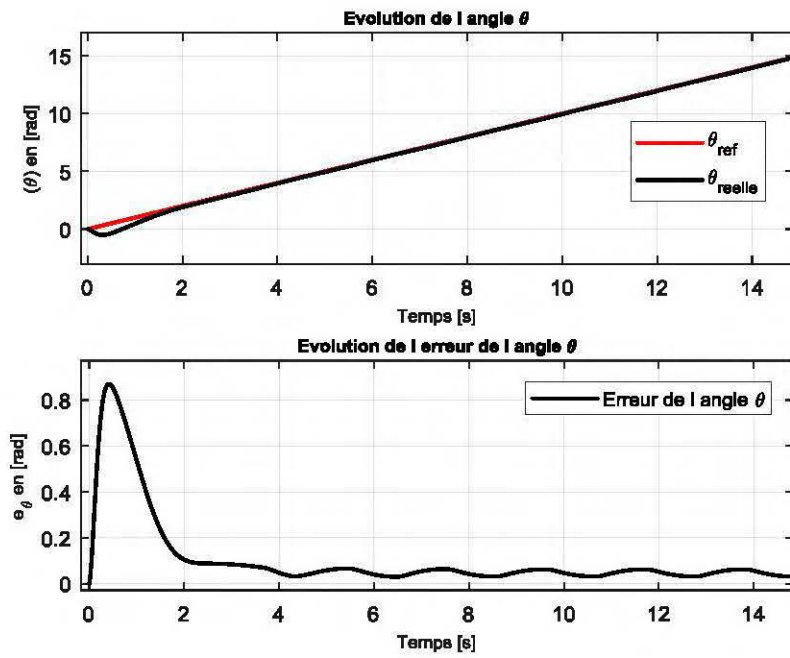


Figure 47: Angle  $\theta$  et son erreur.

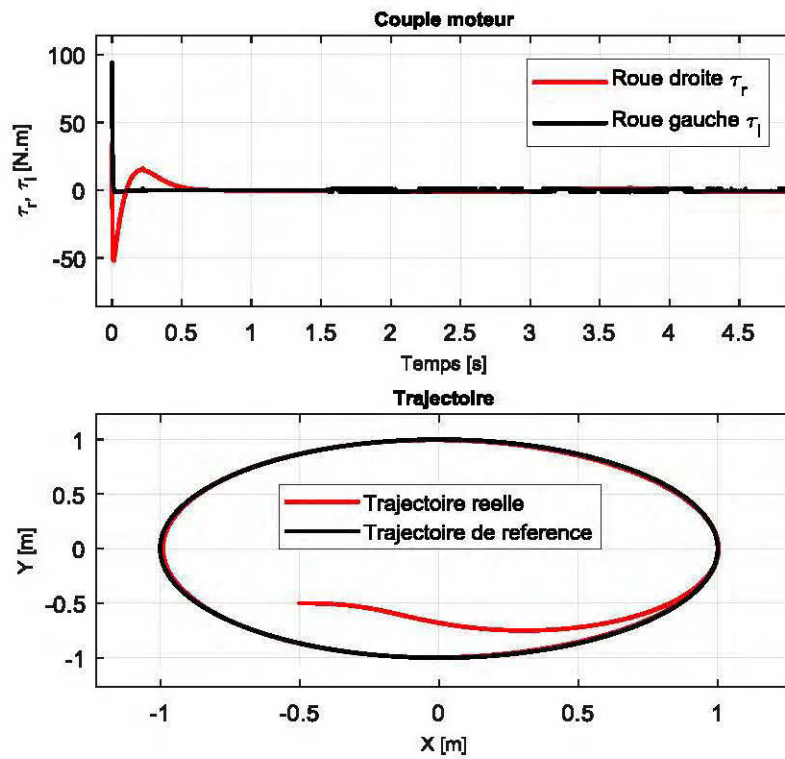


Figure 48: Couples moteurs et trajectoire cartésienne.

## Interprétation des résultats

La figure 48 présente la trajectoire suivie par le robot dans le plan X-Y ainsi que la courbe indiquant le couple moteur. Les valeurs maximales des couples sont comprises entre  $[-50, 100]$  Nm. En ce qui concerne les vitesses, on peut dire que les vitesses du contrôleur cinématique  $(v_c, \omega_c)$  se superposent avec les vitesses du contrôleur dynamique  $(v_d, \omega_d)$  (Figure 44). Les figures 45, 46 et 47 présentent les courbes d'évolution en position  $x, y$  et  $\theta$  du robot.

### 2.2.2. Cas du modèle dynamique non-linéaire.

#### a) Trajectoire N°1

$$\text{Trajectoire (1)} = \begin{cases} x_r(t) = t \\ y_r(t) = 3 \\ \theta_r(t) = 0 \end{cases} \quad P_0 = \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -3 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$$

Paramètres du contrôleur dynamique :

$$\beta = 50$$

$$\text{Vitesses de référence : } \begin{cases} v_r = 1 \text{ m/s} \\ \omega_r = 0 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Paramètres du contrôleur cinématique :

$$k_x = 0.5 \text{ s}^{-1}; k_y = 1 \text{ m}^{-1}; k_\theta = 0.2 \text{ m}^{-1}$$

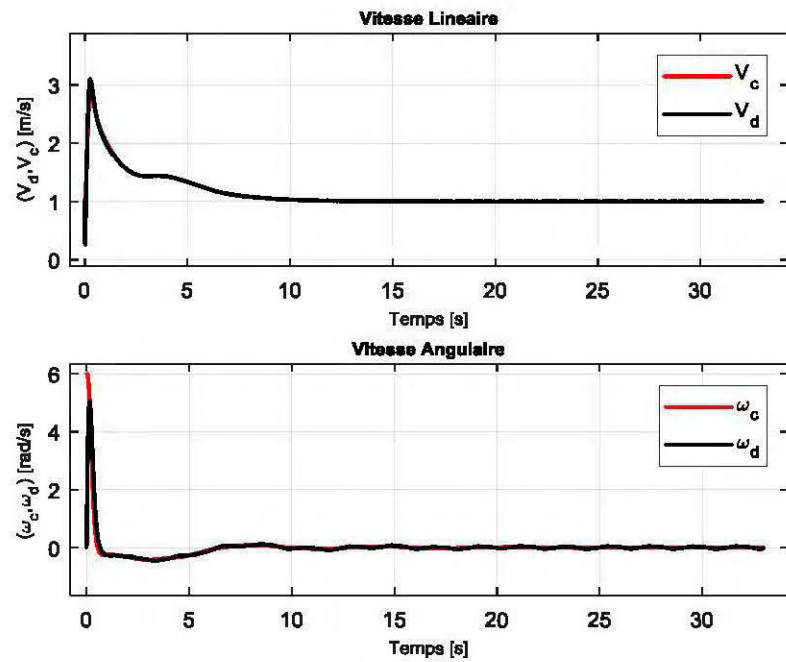


Figure 49: Courbes des vitesses pour le modèle non-linéaire du robot.

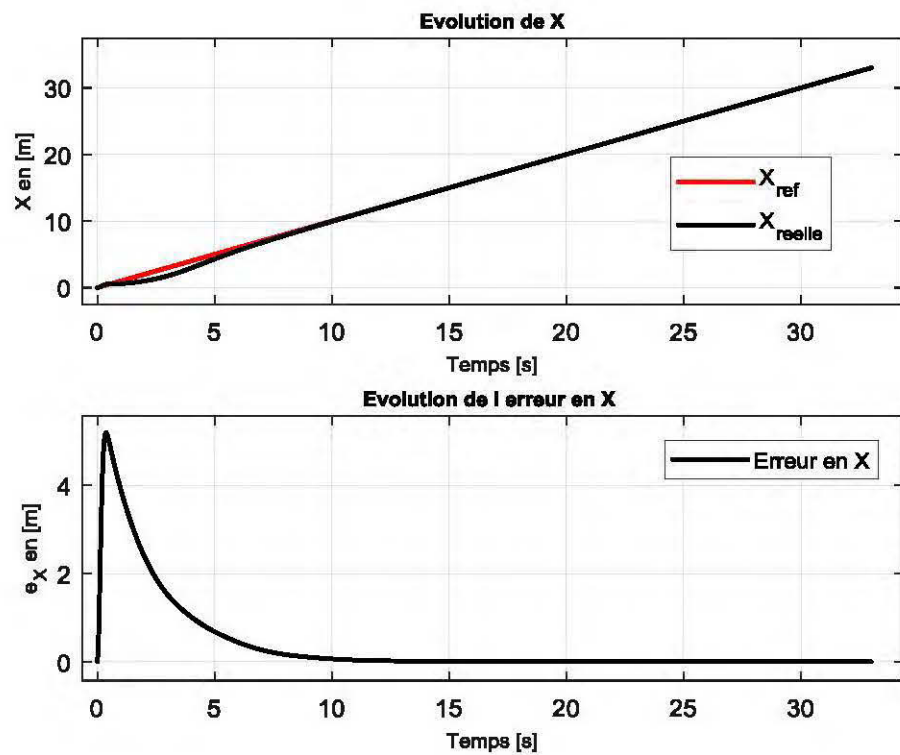


Figure 50: Position en  $x$  et son erreur pour le modèle non-linéaire du robot.

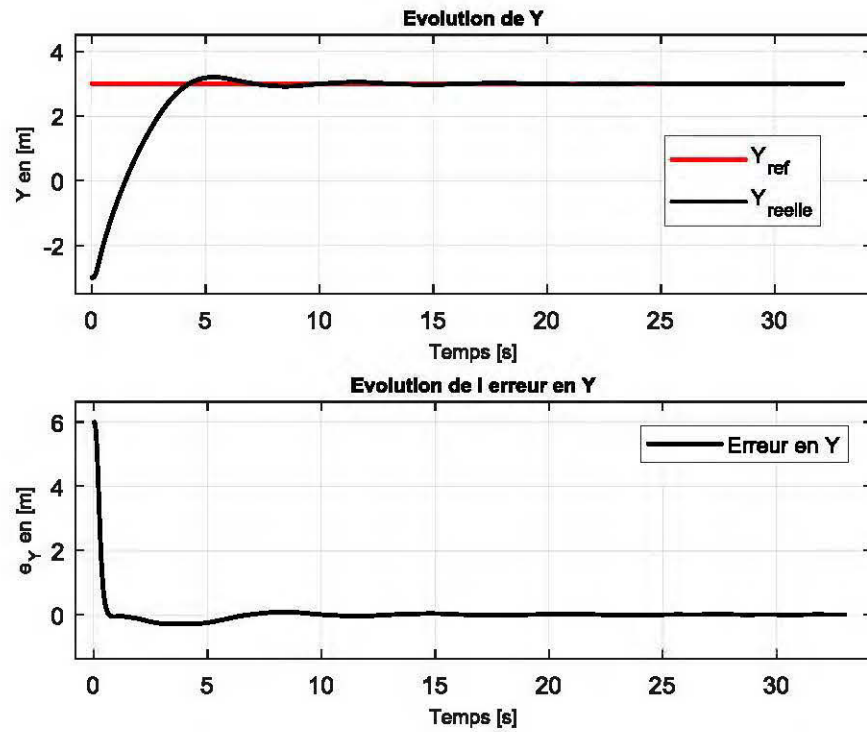


Figure 51: Position en  $y$  et son erreur pour le modèle non-linéaire du robot.

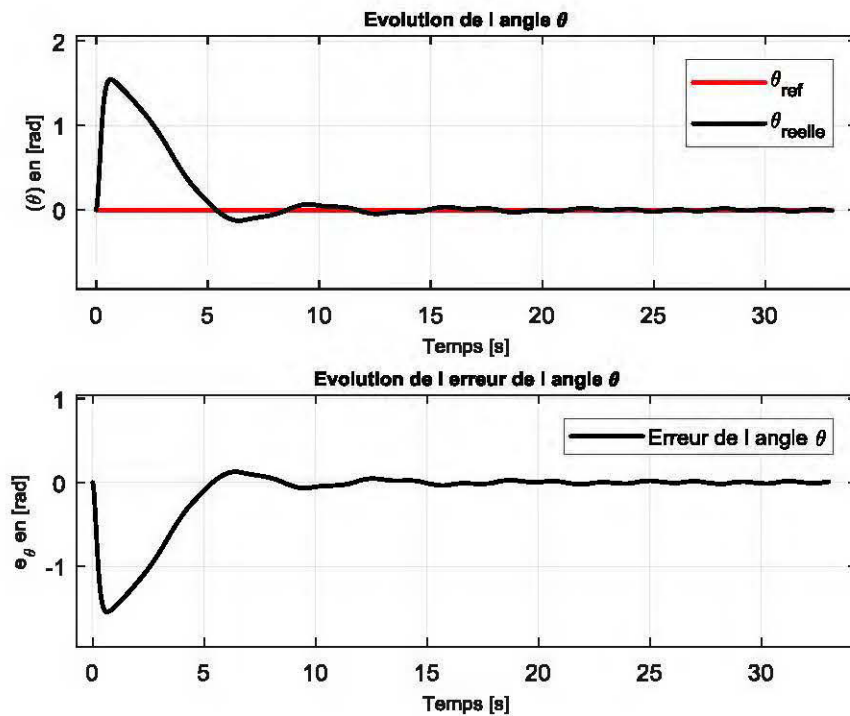
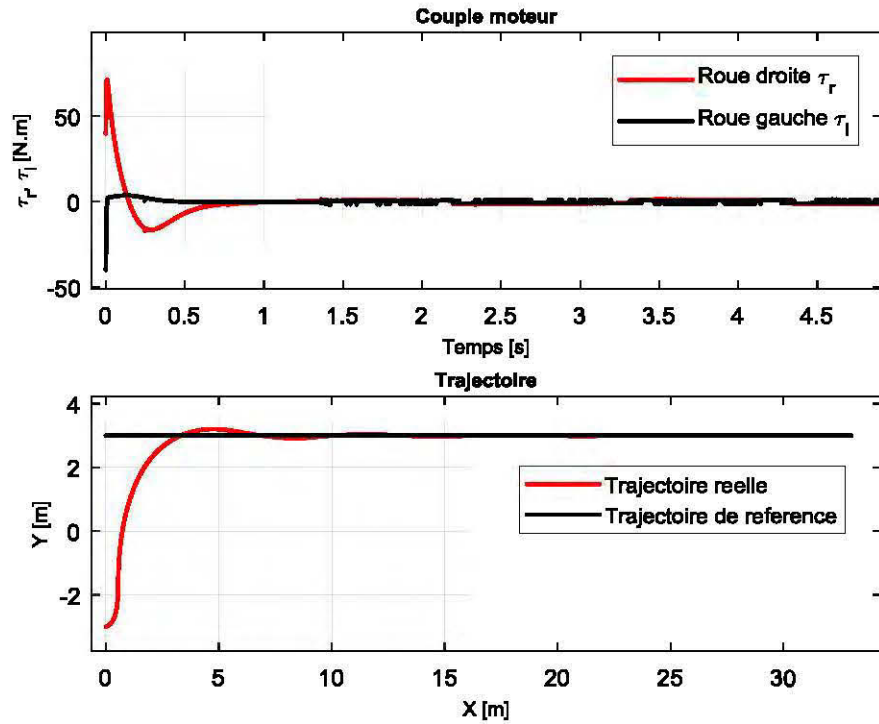


Figure 52: Angle  $\theta$  et son erreur pour le modèle non-linéaire du robot.



*Figure 53: Couples moteurs et trajectoire cartésienne.*

### Interprétation des résultats

Les résultats présentés dans les figures 49, 50, 51, 52 et 53 sont obtenus en faisant des simulations dans les boucles cinématique et dynamique avec un robot mobile dont le modèle dynamique est non linéaire. Les vitesses cinématiques, dynamiques et de référence se superposent ( $v_r = 1m/s$   $\omega_r = 0rad/s$ ). Les erreurs en position  $x$ ,  $y$  et  $\theta$  tendent toutes vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini. Le couple moteur est compris entre -40 et 70 N.m.

#### b) Trajectoire N° 5 : Sinusoïde

$$\begin{cases} x_r(t) = t \\ y_r(t) = 0.5 + 0.25 * \sin(0.3 * \pi * t) \\ \theta_r(t) = 0.25 * \sin(0.3 * \pi * t + 0.5 * \pi) \end{cases} \quad P_0 = \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0.5 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$$

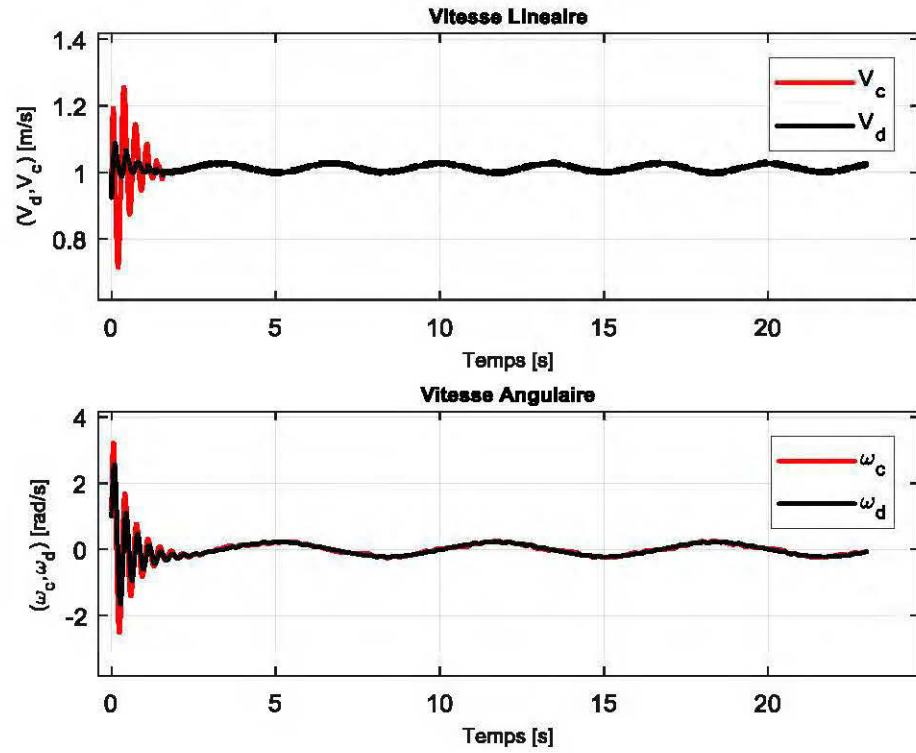
Paramètres du contrôleur dynamique :

$$\beta = 50$$

Vitesses de référence :  $\begin{cases} v_r = 1 \text{ m/s} \\ \omega_r = 1 \text{ rad/s} \end{cases}$

Paramètres du contrôleur cinématique :

$k_x = 100 \text{ s}^{-1}$  ;  $k_y = 350 \text{ m}^{-1}$  ;  $k_\theta = 0.8 \text{ m}^{-1}$



*Figure 54: Courbes des vitesses pour le modèle non-linéaire du robot.*



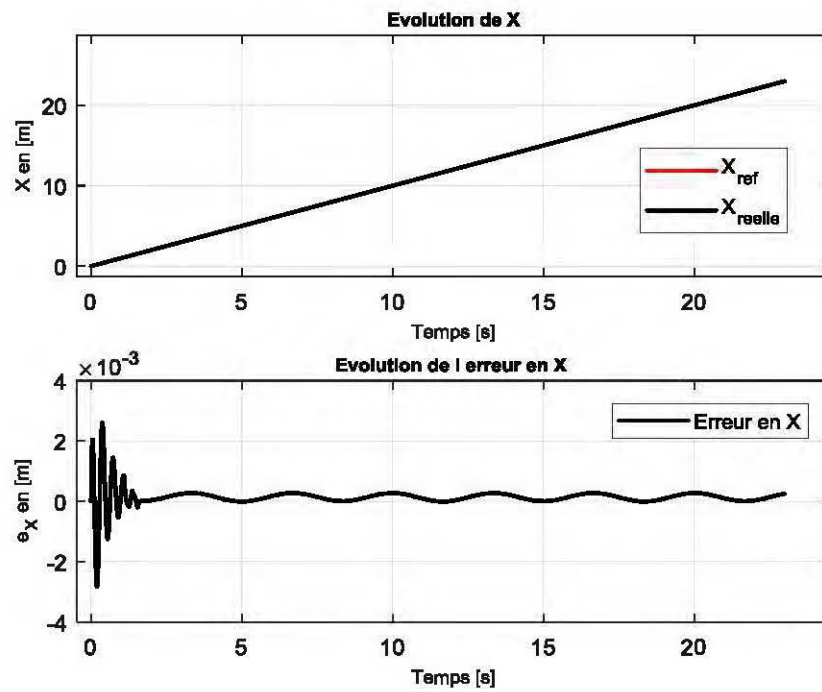


Figure 55: Position en  $x$  et son erreur pour le modèle non-linéaire du robot.

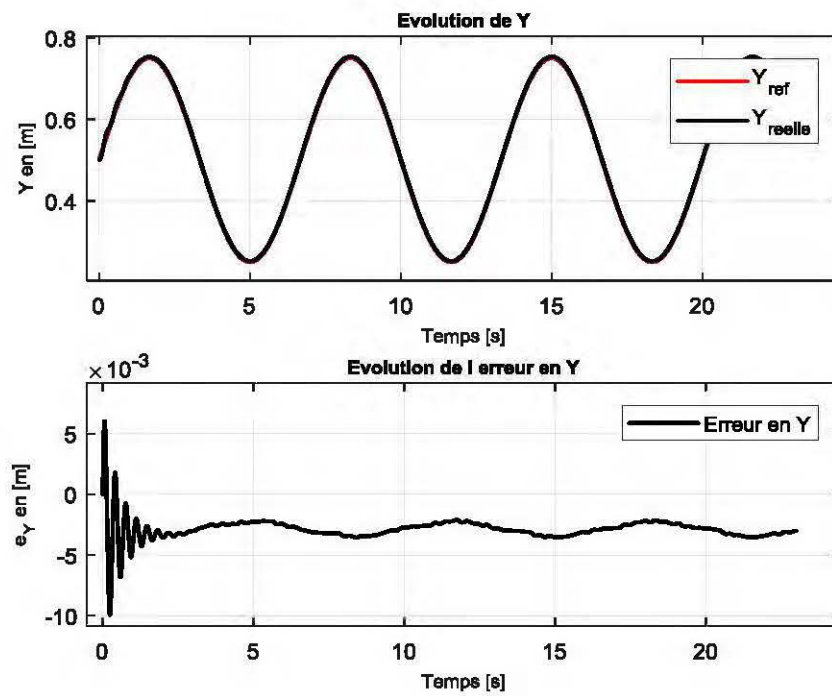


Figure 56: Position en  $y$  et son erreur pour le modèle non-linéaire du robot.

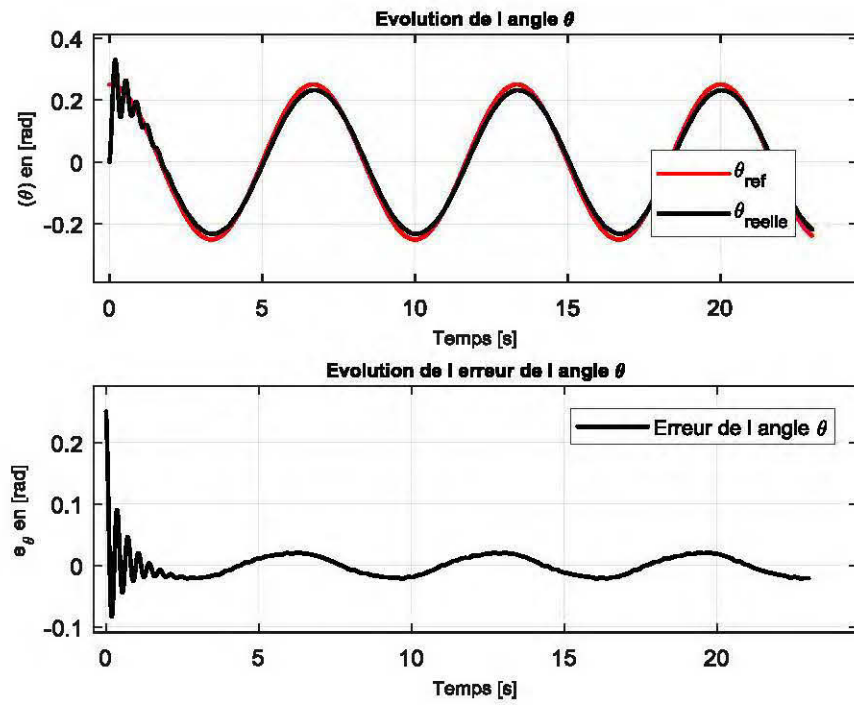


Figure 57: Angle  $\theta$  et son erreur pour le modèle non-linéaire du robot.

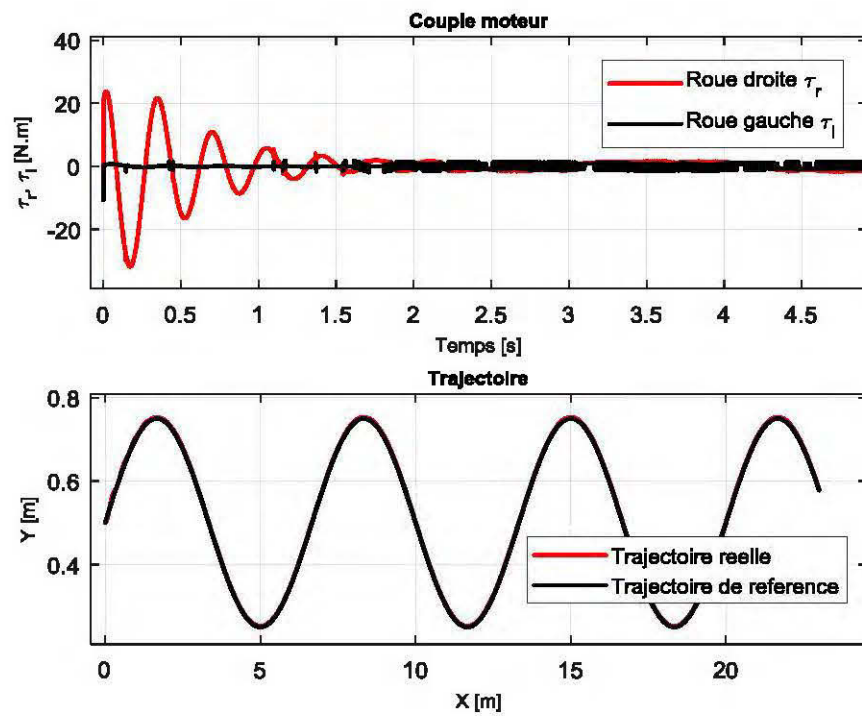


Figure 58: Couples moteurs et trajectoire cartésienne.

## Interprétations

Dans cette simulation, le modèle dynamique du robot est non-linéaire. La commande développée est une commande par mode glissant classique et les paramètres (masse et inertie) sont connus. Les figures 54, 55, 56, 57 et 58 présentent l'évolution des vitesses, de la position et des couples moteurs. Le couple moteur est compris entre  $[-30 ; 30]$  N.m. Après 2 secondes, le robot suit la trajectoire de référence. Les oscillations du couple observées dans la figure 58 sont dues aux perturbations externes et à l'expression  $K.sign(s)$  présente dans la loi de commande.

### 2.2.3. Cas du modèle dynamique non-linéaire avec paramètres inconnus

#### Trajectoire N°5

$$\begin{cases} x_r(t) = t \\ y_r(t) = 0.5 + 0.25 * \sin(0.3 * \pi * t) \\ \theta_r(t) = 0.25 * \sin(0.3 * \pi * t + 0.5 * \pi) \end{cases} \quad P_0 = \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0.5 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$$

Paramètres du contrôleur dynamique :

$$\beta = 50$$

$$\text{Vitesses de référence : } \begin{cases} v_r = 1 \text{ m/s} \\ \omega_r = 1 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Paramètres du contrôleur cinématique :

$$k_x = 100 \text{ s}^{-1} ; k_y = 350 \text{ m}^{-1} ; k_\theta = 0.8 \text{ m}^{-1}$$

Dans cette simulation on suppose que les paramètres du robot tels que la masse  $m(t)$  et l'inertie  $I(t)$  sont inconnues mais constantes. Tout au long de la simulation, on va considérer que ces paramètres ont deux valeurs (Fig. 64).

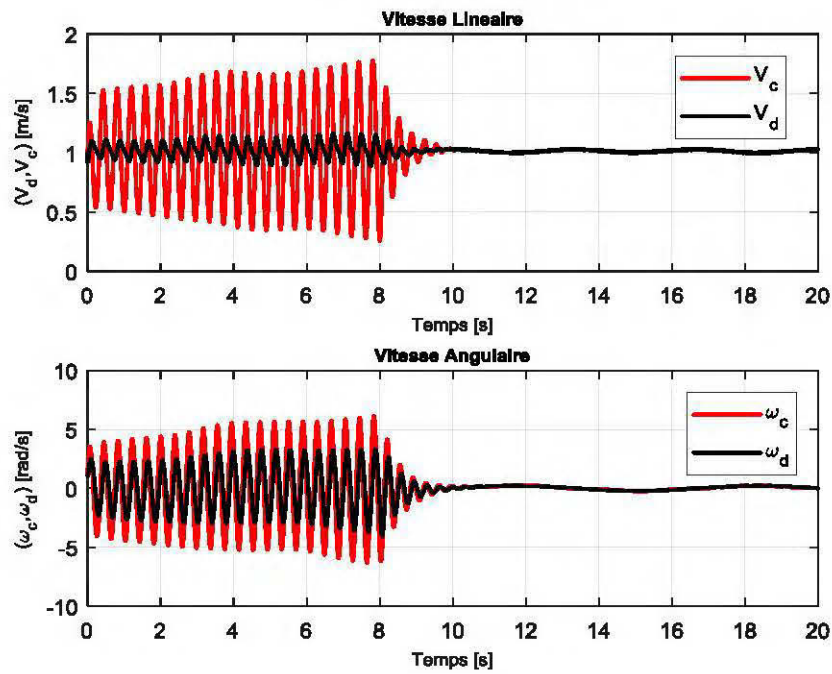


Figure 59: Courbes des vitesses du modèle non-linéaire avec paramètres inconnus.

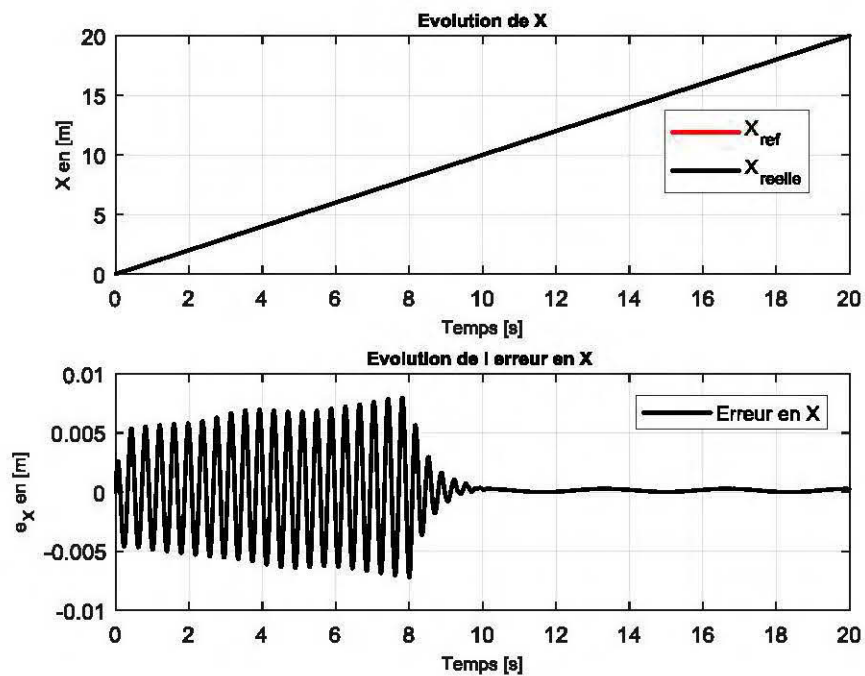
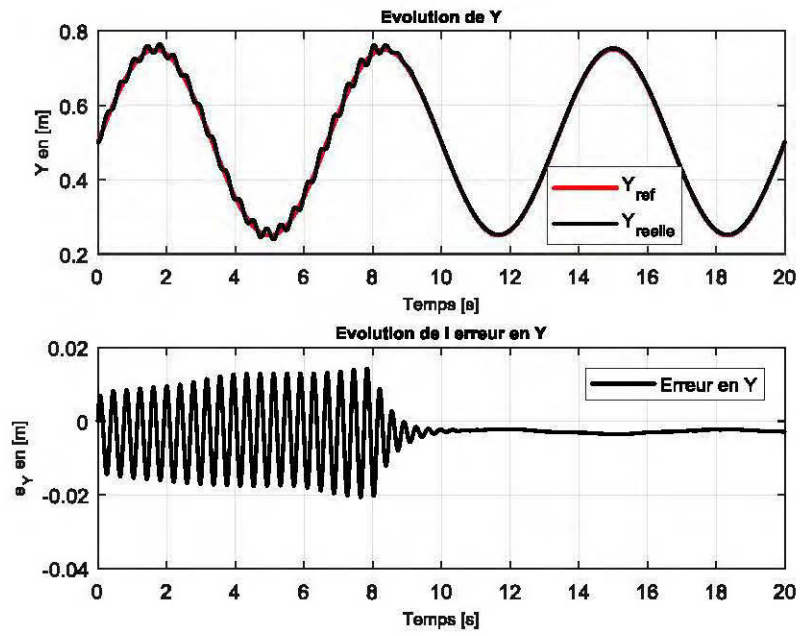
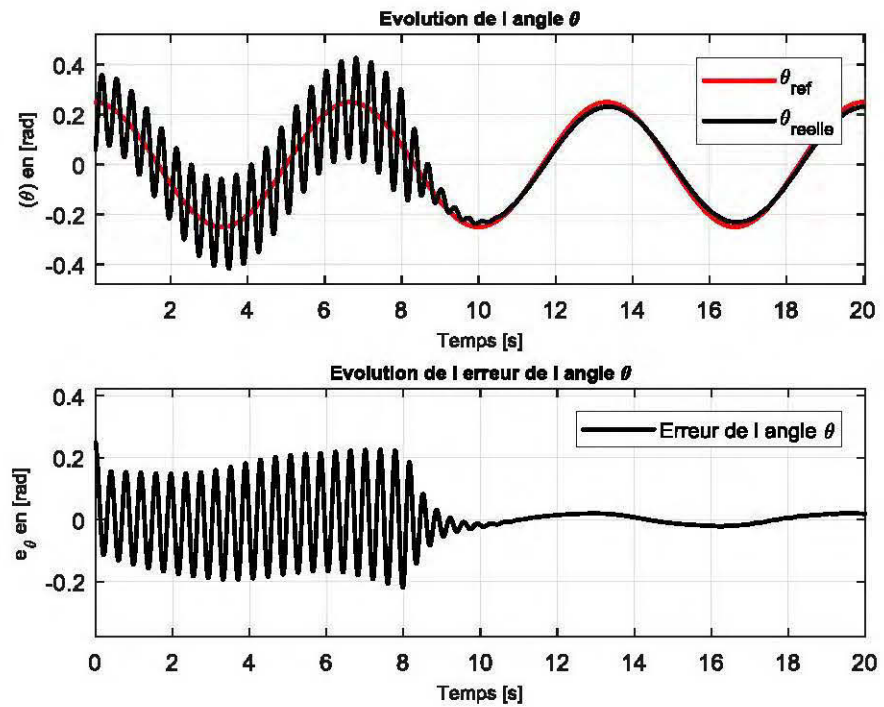


Figure 60: Position en  $x$  et son erreur du modèle non-linéaire avec paramètres inconnus.



**Figure 61:** Position en  $y$  et son erreur du modèle non-linéaire avec paramètres inconnus.



**Figure 62:** Angle  $\theta$  et son erreur du modèle non-linéaire avec paramètres inconnus.

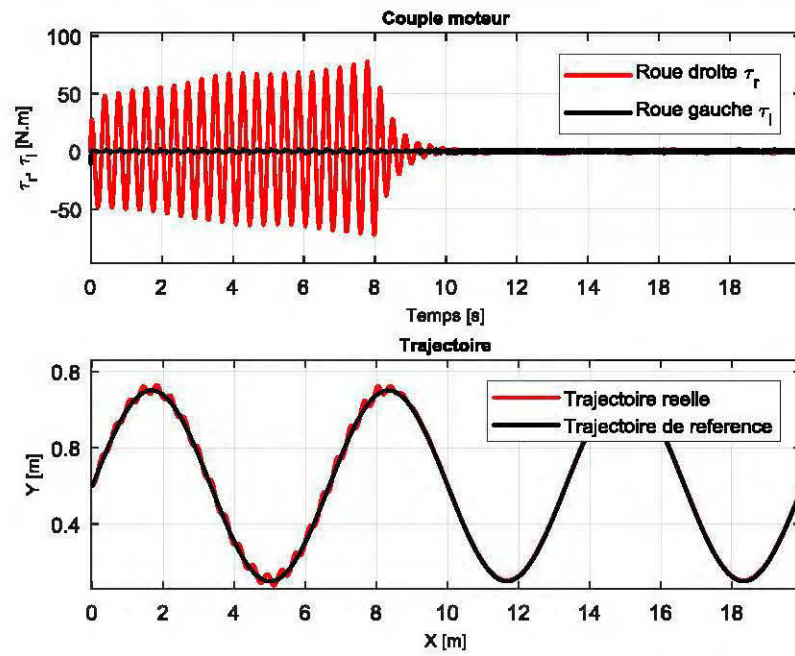


Figure 63: Couples moteurs et trajectoire cartésienne.

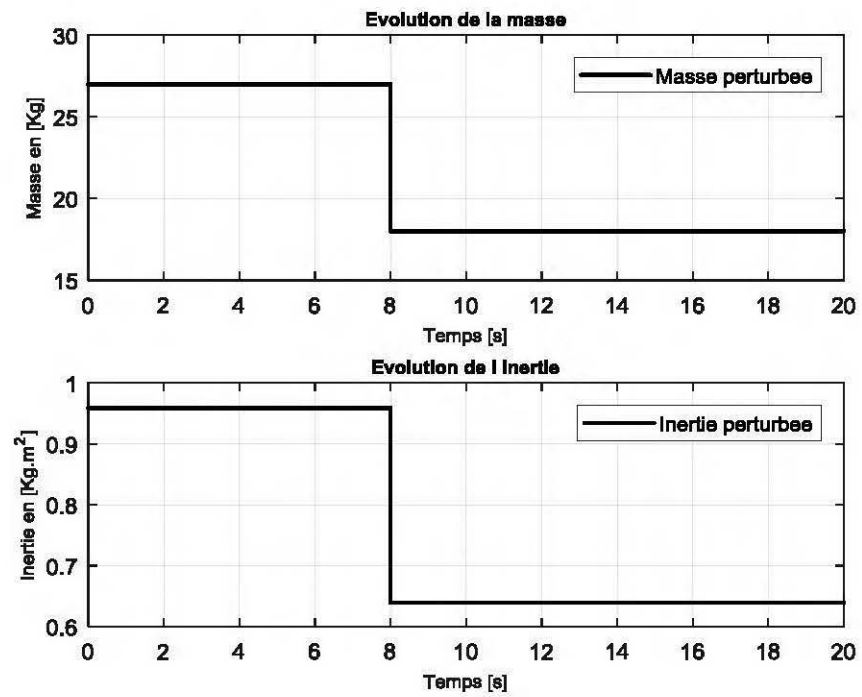


Figure 64: Masse et inertie variant dans le temps

## Interprétations

Les figures 59, 63 et 64 représentent respectivement l'évolution des vitesses du couple moteur et la variation de la masse et de l'inertie. Les figures 60, 61 et 62 indiquent le comportement du robot en position  $x, y$  et  $\theta$ . Le modèle dynamique du robot considéré dans cette simulation est non linéaire avec variation de la masse et l'inertie. On remarque que les perturbations de la masse et de l'inertie influencent sur le comportement du robot le long de sa trajectoire. Ceci est dû au fait que la commande par mode glissant utilisée est non adaptative.

### 2.3. Simulations de la commande par mode glissant adaptatif dans la boucle cinématique et dynamique.

#### Cas du modèle dynamique non-linéaire avec paramètres inconnus.

##### Trajectoire N°5

$$\begin{cases} x_r(t) = t \\ y_r(t) = 0.5 + 0.25 * \sin(0.3 * \pi * t) \\ \theta_r(t) = 0.25 * \sin(0.3 * \pi * t + 0.5 * \pi) \end{cases} \quad P_0 = \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0.5 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$$

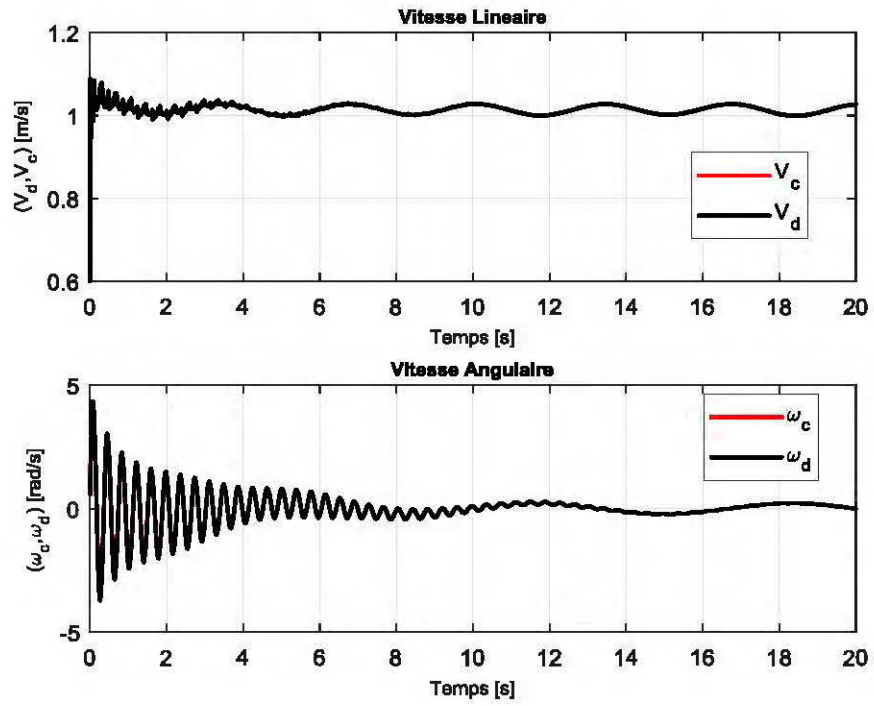
Paramètres du contrôleur dynamique : (Eq. 37) et (Eq. 38)

$$\beta = 200 ; \eta_1 = 500 ; \eta_2 = 200 ; a = 1050 ; b = 1050$$

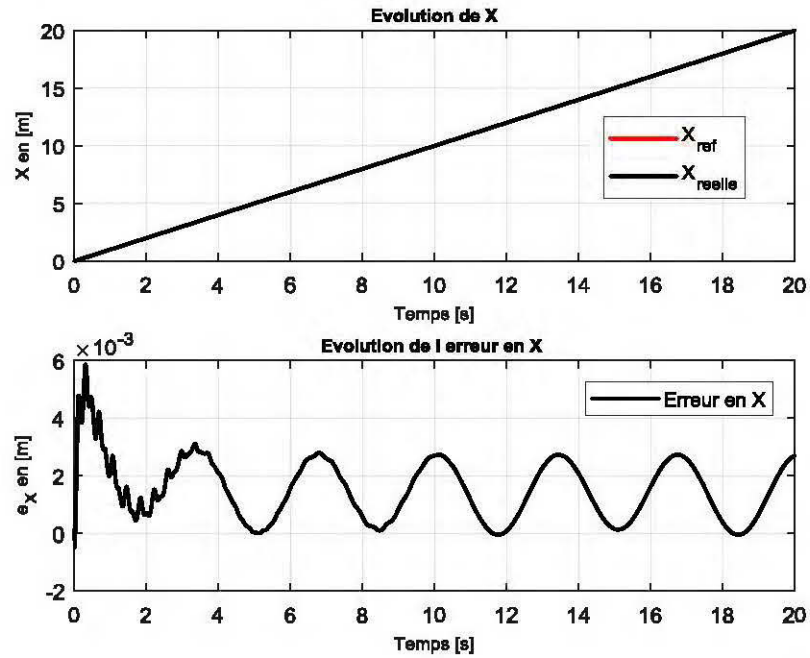
$$\text{Vitesses de référence : } \begin{cases} v_r = 1 \text{ m/s} \\ \omega_r = 1 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Paramètres du contrôleur cinématique :

$$k_x = 10 \text{ s}^{-1} ; k_y = 250 \text{ m}^{-1} ; k_\theta = 0.5 \text{ m}^{-1}$$

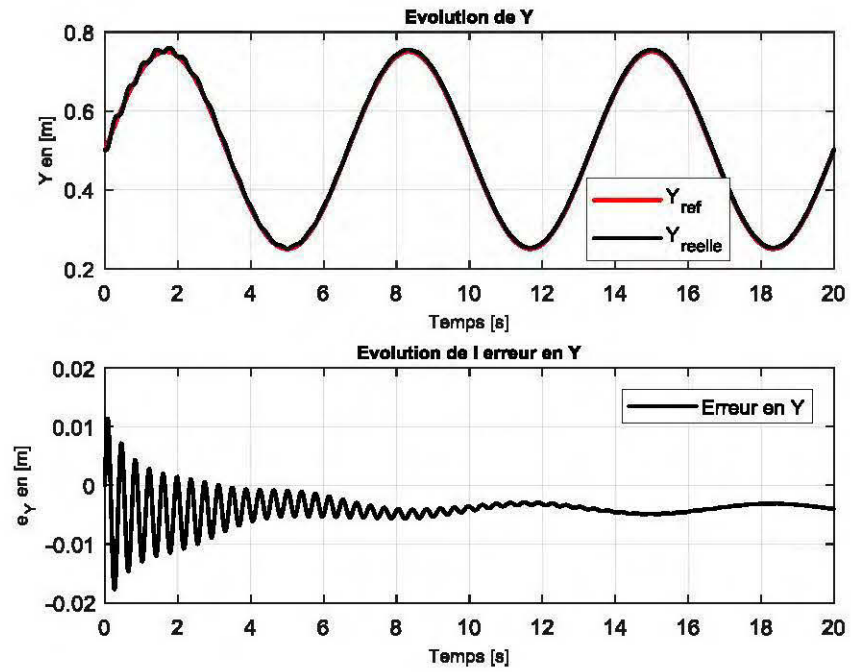


*Figure 65: Courbes des vitesses du modèle non-linéaire du robot avec paramètres inconnus.*

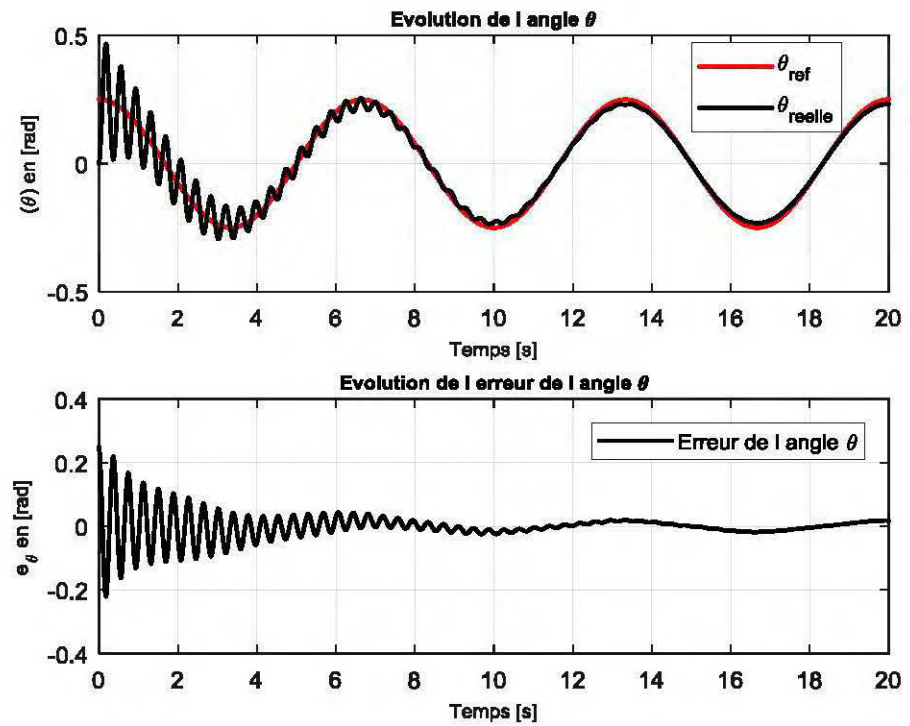


*Figure 66: Position en  $x$  et son erreur du modèle non-linéaire du robot avec paramètres inconnus.*





**Figure 67:** Position en  $y$  et son erreur du modèle non-linéaire avec paramètres inconnus.



**Figure 68:** Angle d'orientation  $\theta$  et son erreur du modèle non-linéaire avec paramètres inconnus.

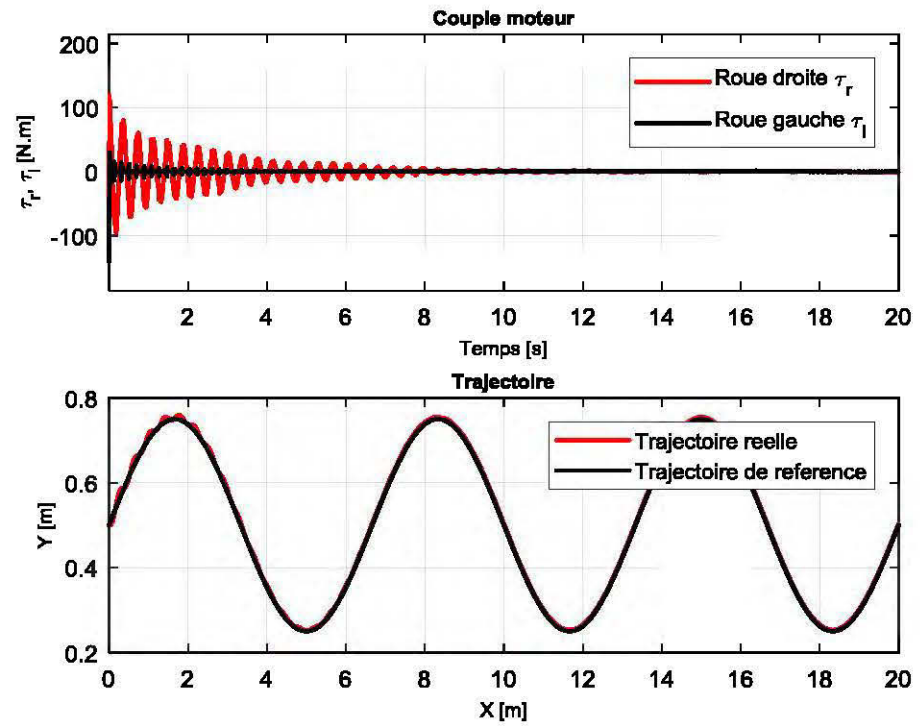


Figure 69: Couples moteurs et trajectoire cartésienne du modèle non-linéaire avec paramètres inconnus.

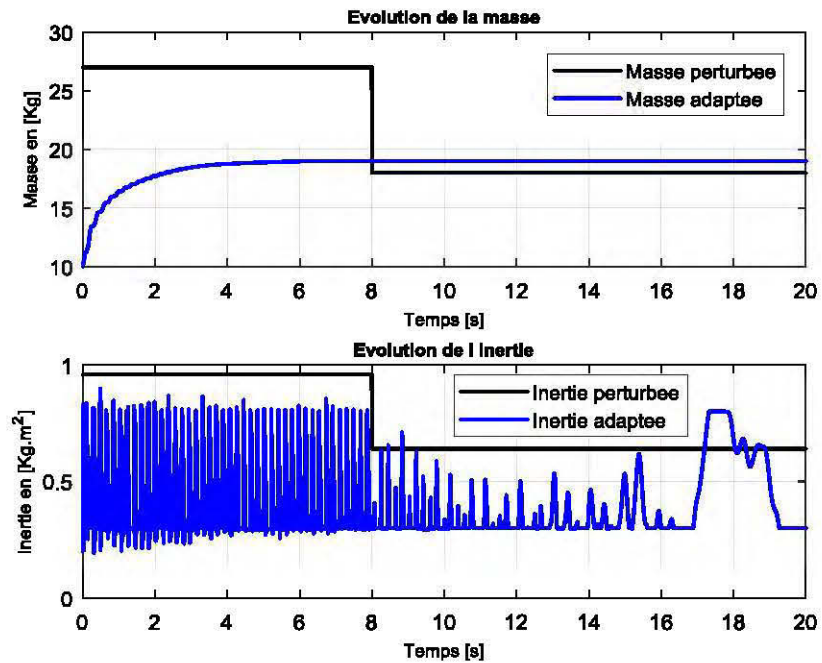


Figure 70: Evolution de la masse et de l'inertie perturbées et adaptées.

## Interpretation

Cette simulation présente les résultats du test de la commande que nous avons élaborée. La figure 70 présente la courbe d'adaptation de la masse et de l'inertie. On observe également qu'après 2 secondes, les vitesses se stabilisent. Les erreurs sont de l'ordre  $10^{-3}$ , ce qui montre que malgré les perturbations externes, la non-linéarité et la variation des paramètres du système, la commande élaborée permet de diriger le robot vers la trajectoire de référence. En comparant la trajectoire de la figure 69 et celle de la figure 63, on se rend compte que la commande adaptative proposée dans notre travail permet au robot de suivre la trajectoire de référence malgré les incertitudes du système.

## Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre est le résultat des différentes simulations de la commande par mode glissant classique et de la commande par mode glissant adaptatif appliquées au système linéaire et non-linéaire en présence des perturbations extérieures et incertitudes du système.

Bien que le robot suive les trajectoires de référence, il apparaît tout de même des oscillations dans le couple moteur. Cela est certainement dû à la fonction  $sign(.)$ . Ce phénomène est généralement appelé le phénomène de broutement ou chattering (en anglais). Une des solutions à ce problème serait de remplacer la fonction  $sign(.)$  par la fonction tangente hyperbolique  $tanh(.)$  ou aussi d'utiliser un observateur de perturbations. Dans le prochain chapitre, nous proposons une méthode permettant de réduire considérablement ces oscillations.

## **CHAPITRE 6 : REDUCTION DU PHENOMENE DE BROUTEMENT**

### **Introduction**

#### **1. Commande par mode glissant avec observateur de perturbation**

- 1.1.        Calcul de l'observateur
- 1.2.        Calcul de la commande
- 1.3.        Etude de la stabilité

#### **2. Simulation**

#### **3. Interprétation et Comparaison des deux lois de commandes**

### **Conclusion**

## Introduction

La commande par mode glissant a prouvé son efficacité à travers différentes études théoriques et réalisations pratiques d'ingénierie. L'avantage de cette approche est sa grande robustesse faces aux perturbations et aux incertitudes de modélisation. Cependant, cette technique comporte un inconvénient majeur qui est le phénomène de broutement ('chattering' en anglais) provoqué par la partie discontinue de cette loi de commande qui engendre des effets indésirables au système à commander. Ainsi donc, afin de surmonter ce problème, plusieurs chercheurs ont proposé des solutions en vue de réduire et même d'éliminer ce phénomène de réticence. Les travaux effectués par [31] proposent plusieurs solutions. Compte tenu du fait que le phénomène de chattering est considéré comme une perturbation et que le système est non linéaire alors, une nouvelle loi de commande par mode glissant basée sur observateur de perturbation serait une solution probable qui permettra de résoudre le problème. Par ailleurs, en s'inspirant des travaux réalisés par [32] et [33], il est également possible de diminuer le phénomène de chattering causé par la fonction  $sign(.)$  en la remplaçant par la fonction tangente hyperbolique  $tanh(.)$ . La nouvelle loi de commande sera donc une combinaison de deux idées principales : la première étant la commande par mode glissant basée sur l'observateur non linéaire de perturbation et la deuxième étant l'utilisation de la fonction  $tanh(.)$ . Afin de mener à bien nos recherches, le chapitre suivant est présenté comme suit : Dans un premier temps nous calculons la loi de commande par mode glissant avec un observateur de perturbation, ensuite nous effectuons des simulations et enfin nous comparons les résultats obtenus.

## 1. Commande par mode glissant avec observateur de perturbation.

La modélisation du système est donnée par l'équation suivante ci-dessous

$$\begin{bmatrix} \left(m + \frac{2I_w}{R^2}\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left(I + \frac{2L^2}{R^2} I_w\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -m_c d \omega \\ m_c d \omega & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{L}{R} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

avec  $u = \begin{cases} u_1 = \tau_R + \tau_L \\ u_2 = \tau_R - \tau_L \end{cases}$  où  $(\tau_R, \tau_L)$  est le couple d'entrée.

Soit  $m_0 = \left(m + \frac{2I_w}{R^2}\right)$  la masse équivalente du système et  $I_0 = \left(I + \frac{2L^2}{R^2} I_w\right)$  son inertie équivalente.

Le système étant soumis à des perturbations  $d(t)$ , l'équation (6.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = \frac{m_c d}{m_0} \omega^2 + \frac{1}{m_0 R} u_1(t) + d_1(t) \\ \dot{\omega}(t) = \frac{-m_c d}{I_0} v \cdot \omega + \frac{L}{I_0 R} u_2(t) + d_2(t) \end{cases} \quad (6.2)$$

où  $d(t) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$  est une perturbation non connue mais bornée,  $|d| \leq D$ .

En posant :

$x = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$  : le vecteur d'état du système ;

$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix}$  : la dérivé de  $x$  ;

$f(x, t) = \begin{bmatrix} \frac{m_c d}{m_0} \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{-m_c d}{I_0} v \cdot \omega \end{bmatrix}$  : une fonction non linéaire ;

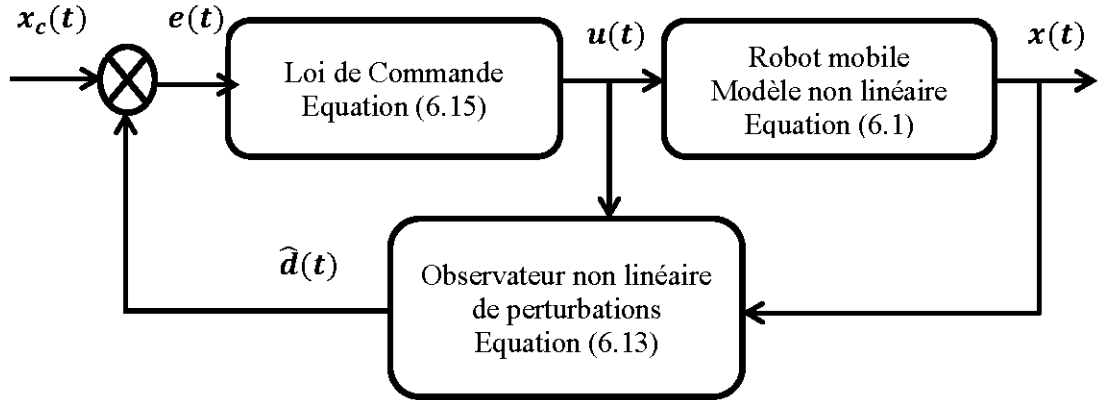
$g_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_0 R} & 0 \\ 0 & \frac{L}{I_0 R} \end{bmatrix}$  : une fonction inversible ;

$g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

L'équation (6.2) du système peut se mettre sous la forme non linéaire suivante :

$$\dot{x} = f(x) + g_1 \cdot u(t) + g_2 \cdot d(t) \quad (6.3)$$

En s'inspirant des travaux effectués par [32] et [33], il est possible de concevoir une nouvelle loi de commande par mode glissant basée sur un observateur non linéaire de perturbation. La figure 71 représente la boucle interne du système (robot mobile unicycle) utilisant la commande par mode glissant basée sur un observateur non linéaire de perturbation.



**Figure 71:** Schéma de commande basé sur un observateur de perturbation

### 1.1. Calcul de l'observateur

Afin d'éliminer d'avantage les perturbations observées dans la commande, un observateur de perturbation serait nécessaire.

Soit  $d(t)$  une perturbation inconnue mais bornée. Supposons que  $d(t)$  varie lentement, alors  $\dot{d}(t) \cong 0$  [32].

L'équation (6.3) devient

$$\dot{x} - f(x) - g_1(x) \cdot u(t) = g_2 \cdot d(t) \quad (6.4)$$

L'estimé de la perturbation proposé par [32] est :

$$\dot{\hat{d}} = -l(x) \cdot g_2 \cdot \hat{d} + l(x) \cdot (\dot{x} - f(x) - g_1(x) \cdot u(t)) \quad (6.5)$$

où  $l(x)$  est la matrice de l'observateur de perturbation.

En posant que

$$\tilde{d} = d - \hat{d} \quad (6.6)$$

où  $\hat{d}$  est l'estimé de  $d$ .



Alors la dérivé de  $\tilde{d}$  devient :

$$\dot{\tilde{d}} = \dot{d} - \dot{\hat{d}}$$

On a donc:

$$\dot{\tilde{d}} = l(x) \cdot g_2 \cdot \hat{d} - l(x) \cdot (\dot{x} - f(x) - g_1(x) \cdot u(t)) \quad (6.7)$$

En remplaçant l'équation (6.4) dans (6.7), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{d}} &= -l(x) \cdot g_2 \cdot d + l(x) \cdot g_2 \cdot \hat{d} \\ \dot{\tilde{d}} &= -l(x) \cdot g_2 (d - \hat{d}) \\ \dot{\tilde{d}} + l(x) \cdot g_2 \cdot \tilde{d} &= 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

En faisant un choix adéquat de  $l(x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\hat{d}(t)$  se rapproche exponentiellement de  $d(t)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  [32].

L'expression (6.5) contient le terme  $\dot{x}$ , toutefois la perturbation ne peut être estimée car on ne connaît pas  $\dot{x}$ . Pour résoudre ce problème on introduit une variable auxiliaire  $z(x)$  telle que :

$$z(x) = \hat{d}(t) - p(x) \quad (6.9)$$

où  $\frac{\partial p(x)}{\partial x} = l(x)$ , ce qui implique que  $z(x) + p(x) = \hat{d}(t)$ .

Ainsi la dérivé de  $z(x)$  est donnée par :

$$\dot{z}(x) = \dot{\hat{d}}(t) - \frac{\partial p(x)}{\partial x} \dot{x} \quad (6.10)$$

Des équations (6.5), (6.9) et (6.10) on obtient donc :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{d}} &= -l(x) \cdot g_2(x) \cdot (z(t) + p(x)) \\ &+ l(x) \cdot \dot{x} - l(x) \cdot f(x) - l(x) \cdot g_1(x) \cdot u(t) \end{aligned} \quad (6.11)$$

or

$$l(x) \cdot \dot{x} = \frac{\partial p(x)}{\partial x} \dot{x} \quad (6.12)$$

En se servant des équations (6.10), (6.11) et (6.12), on obtient l'expression de l'observateur non linéaire de perturbation donnée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}(x) = -l(x) \cdot g_2(x) \cdot z(x) - l(x)(g_2(x) \cdot p(x) + f(x) + g_1(x) \cdot u(t)) \\ \hat{d}(t) = z(x) + \int l(x) dx \end{cases} \quad (6.13)$$

## 1.2. Calcul de la commande

Soit la surface de glissement définie par :

$$S(t) = e(t) + \beta \int e(t) dt$$

$x = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$  : est le vecteur d'état du système définit dans l'équation (6.2) ;

$x_c = \begin{pmatrix} v_c \\ \omega_c \end{pmatrix}$  : est l'état désirée ;

$e(t) = x - x_c$ : est l'erreur et  $\beta > 0$ .

Si la dérivé de la surface de glissement s'annule ( $\dot{S}(t) = 0$ ) ; on obtient l'équation suivante :  $\dot{S}(t) = \dot{e}(t) + \beta e(t) = 0$ , soit :

$$(f(x) + g_1(x) \cdot u(t) + g_2(x) \cdot d(t) - \dot{x}_c) + \beta \cdot e = 0 \quad (6.14)$$

De l'équation (6.14) on obtient la commande  $u(t)$ , soit :

$$u(t) = g_1(x)^{-1} \left[ \dot{x}_c - \beta \cdot e - f(x) - g_2(x) \cdot \hat{d}(t) - K \cdot \text{sign}(S) - S \cdot \frac{|g_2(x)|^2}{\eta(x)} \right] \quad (6.15)$$

avec  $\eta(x) = \frac{\partial p(x)}{\partial x} g_2(x) = l(x) \cdot g_2(x)$  [32].

Pour diminuer le phénomène de broutement, nous allons remplacer la fonction  $\text{sign}(\cdot)$  par la fonction  $\tanh(\cdot)$ .

## 1.3. Etude de la stabilité

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(S, d) = \frac{1}{2} S^2 + \frac{1}{2} \tilde{d}^2 \quad (6.16)$$

En dérivant  $V(S, d)$  par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{V} = S \cdot \dot{S} + \tilde{d} \cdot \dot{\tilde{d}}$$

or d'après (6.8),

$$\dot{\tilde{d}} + l(x) \cdot g_2(x) \cdot \tilde{d} = 0$$

$$\dot{\tilde{d}} = -l(x) \cdot g_2(x) \cdot \tilde{d}$$

ce qui implique que :

$$\dot{\tilde{d}} = -\frac{\partial p(x)}{\partial x} g_2(x) \cdot \tilde{d}$$

En utilisant (6.14) et (6.15),

la dérivé de  $V(S, d)$  devient :

$$\dot{V} = S \cdot (\beta \cdot e + \dot{x} - \dot{x}_c) - \frac{\partial p(x)}{\partial x} g_2(x) \cdot \tilde{d}^2$$

$$\dot{V} = S \cdot \left( \beta \cdot e + \left[ \dot{x}_c - \beta \cdot e - f(x) - g_2(x) \cdot \hat{d}(t) - K \cdot \text{sign}(S) - S \cdot \frac{|g_2(x)|^2}{\eta(x)} \right] - \dot{x}_c \right) - \frac{\partial p(x)}{\partial x} g_2(x) \cdot \tilde{d}^2$$

$$\dot{V} = S \cdot \left[ g_2(x)(d - \hat{d}) - S \cdot \frac{|g_2(x)|^2}{\eta(x)} - K \cdot \text{sign}(S) \right] - \frac{\partial p(x)}{\partial x} g_2(x) \cdot \tilde{d}^2$$

$$\dot{V} = S \cdot g_2(x) \cdot \tilde{d} - \frac{|S \cdot g_2(x)|^2}{\eta(x)} - K \cdot S \cdot \text{sign}(S) - \frac{\partial p(x)}{\partial x} g_2(x) \cdot \tilde{d}^2$$

$$\text{Avec } \eta(x) = \frac{\partial p(x)}{\partial x} g_2(x)$$

$$\dot{V} \leq |S \cdot g_2(x)| \cdot |\tilde{d}(t)| - \eta(x) \cdot |\tilde{d}(t)|^2 - \frac{|S \cdot g_2(x)|^2}{\eta(x)} - K \cdot S \cdot \text{sign}(S)$$

$$\dot{V} \leq 2 \cdot |S \cdot g_2(x)| \cdot |\tilde{d}(t)| - \eta(x) \cdot |\tilde{d}(t)|^2 - \frac{|S \cdot g_2(x)|^2}{\eta(x)} - K \cdot S \cdot \text{sign}(S)$$

Ainsi l'expression de la dérive de  $V(S, d)$  est donnée par :

$$\dot{V} = - \left( \sqrt{\eta(x)} |\tilde{d}(t)| - \frac{|S \cdot g_2(x)|}{\sqrt{\eta(x)}} \right)^2 - K \cdot S \cdot \text{sign}(S) \quad (6.17)$$

Quel que soit  $S \neq 0$  et  $K > 0$

$$\dot{V} \leq -K \cdot S \cdot \text{sign}(S)$$

ce qui implique que  $\dot{V} \leq 0$ . Lorsque  $t$  tends vers l'infini,  $S$  tend vers zéro.

## 2. Simulation

Afin de vérifier l'efficacité de la nouvelle loi de commande, nous avons effectué des simulations avec la même trajectoire que la loi de commande donnée par l'équation (4.36) du chapitre 4. L'équation de la trajectoire utilisée dans la simulation est la suivante :

### Trajectoire N° 5

$$\begin{cases} x_r(t) = t \\ y_r(t) = 0.5 + 0.25 \cdot \sin(0.3 \cdot \pi \cdot t) \\ \theta_r(t) = 0.25 \cdot \sin(0.3 \cdot \pi \cdot t + 0.5 \cdot \pi) \end{cases} \quad \text{avec } P_0 = \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0.5 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$$

Vitesses de référence :  $\begin{cases} v_r = 0.8 \text{ m/s} \\ \omega_r = 0.8 \text{ rad/s} \end{cases}$

Paramètres du contrôleur cinématique :

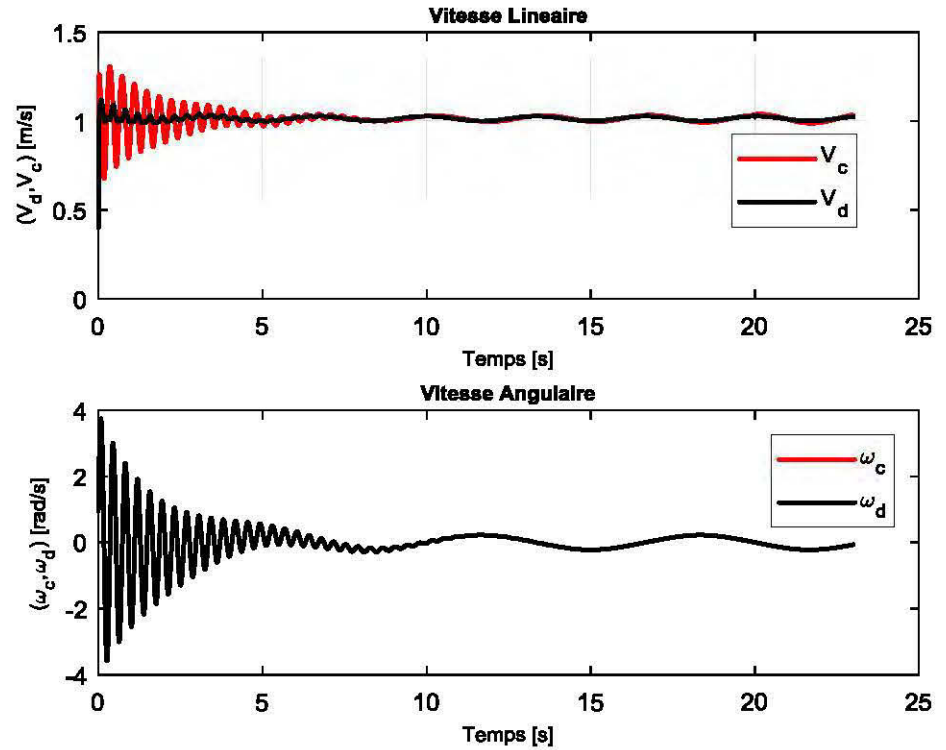
$$k_x = 100 \text{ s}^{-1}; k_y = 350 \text{ m}^{-1}; k_\theta = 0.8 \text{ m}^{-1}$$

Paramètres de l'observateur de perturbation. (Eq. 6.13) et (Eq. 6.15)

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_0 R} & 0 \\ 0 & \frac{L}{I_0 R} \end{bmatrix}, g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, l = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, p(x) = \begin{bmatrix} 0.5 \cdot x_1 \\ 0.5 \cdot x_2 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = -800; K_2 = -800; \beta = 1, \eta(x) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

En remplaçant la fonction  $\text{sign}(\cdot)$  par la fonction  $\tanh(\cdot)$  on a les résultats suivants :



**Figure 72:** Courbes des vitesses du modèle non-linéaire obtenues par un observateur non linéaire de perturbations.

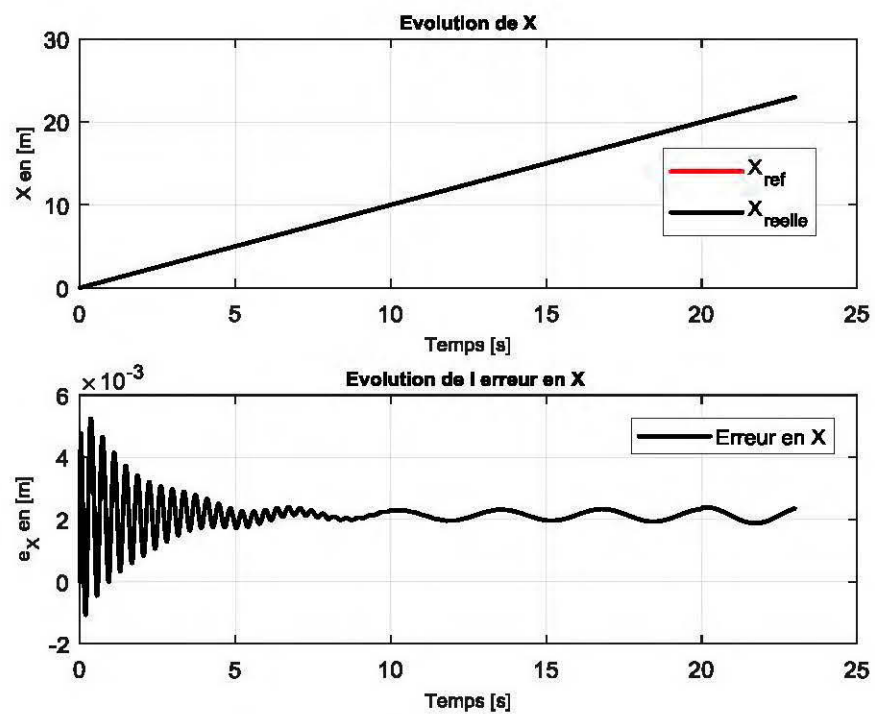


Figure 73: Position en x et son erreur.

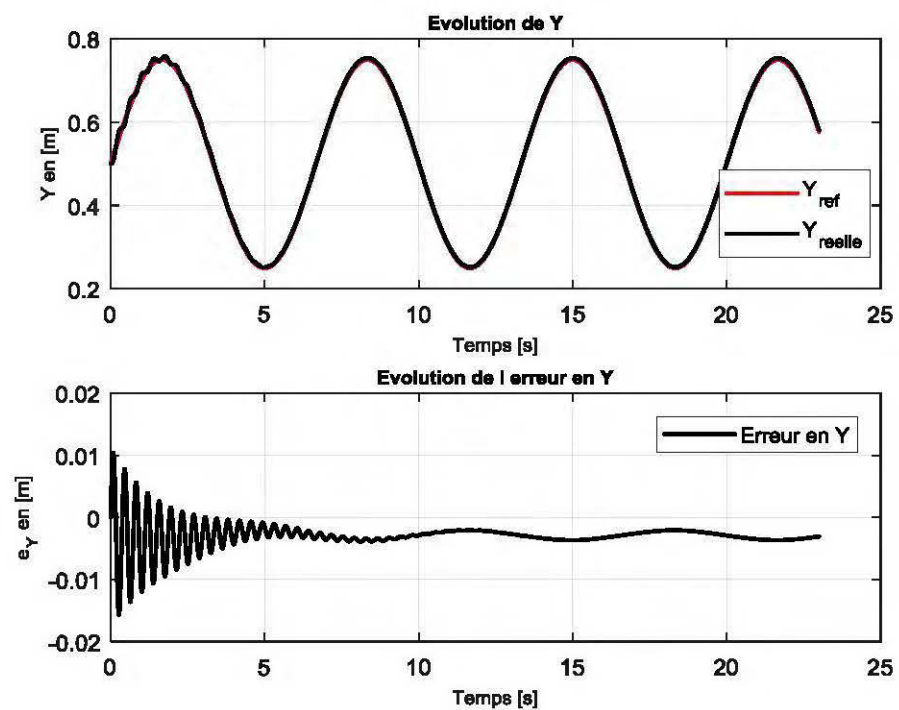


Figure 74: Position en y et son erreur.

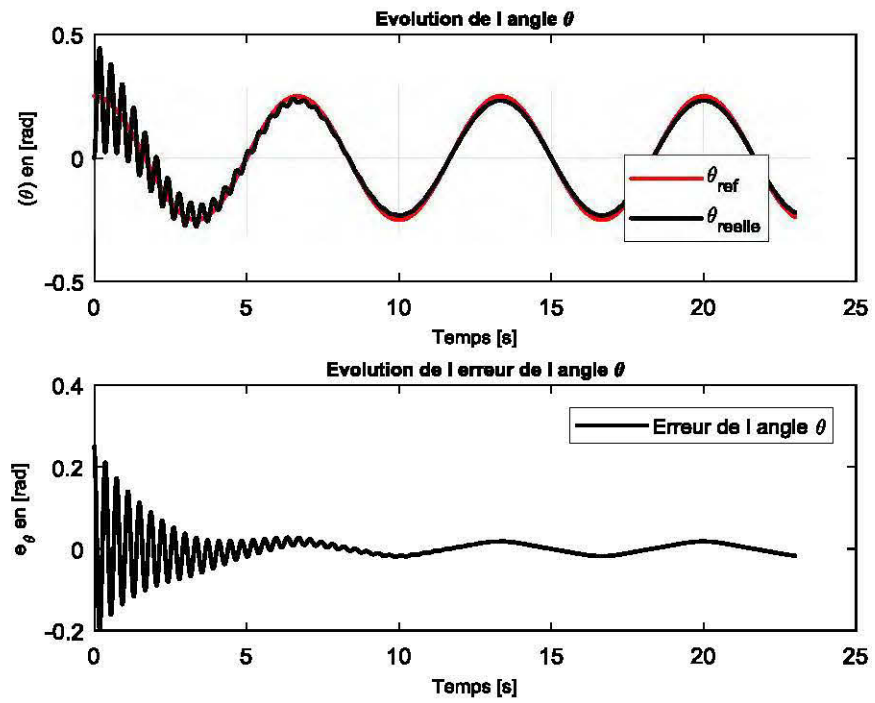


Figure 75: Angle  $\theta$  et son erreur.

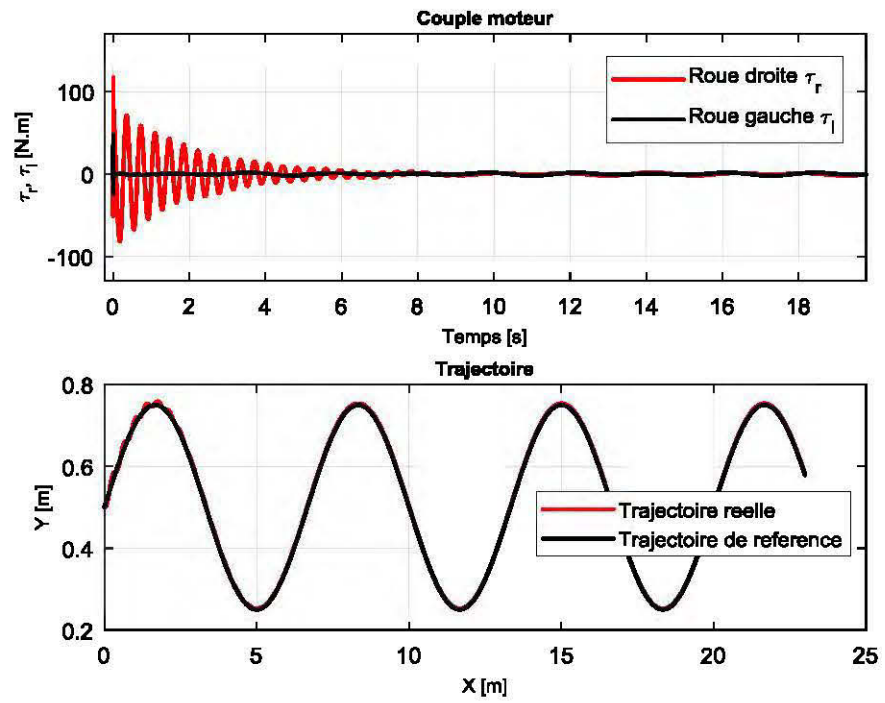


Figure 76: Couples moteurs et trajectoire cartésienne.

### 3. Interprétation et comparaison

Dans cette partie du travail, l'idée générale est de considérer que toutes les perturbations du système se trouvent dans l'image du vecteur d'entrée de la commande  $u(t)$ . Ainsi en concevant un observateur de perturbation, on peut estimer les perturbations présentes dans la commande, ensuite les supprimer. Malgré la présence de l'estimateur de perturbation, il en reste tout de même des perturbations de faible amplitude dans la commande. Une solution envisageable serait de concevoir un estimateur de vitesse.

Comparativement aux figures 65 à 69, les figures 72 à 76 issues de la nouvelle loi de commande par mode glissant avec observateur de perturbations présentent une erreur de l'ordre de  $10^{-4}$ . En revanche, l'amplitude du couple a augmenté.

## Conclusion

Les résultats de simulations présentés dans les chapitres 5 et 6 montrent effectivement que, bien que le robot soit soumis à des perturbations, aux incertitudes et aux non linéarités du système, les commandes élaborées permettent de contrôler le robot. Comparativement à la loi de commande par mode glissant basée sur un observateur de perturbations non linéaire présentée dans le Chapitre 6, la loi de commande par mode glissant adaptatif a un couple moteur de  $[-200, 110]$  N.m et une erreur de l'ordre de  $10^{-2}$  pendant que la deuxième loi de commande basée sur le mode glissant avec un observateur de perturbation présente un couple de  $[-100, 100]$  N.m, avec une erreur de l'ordre de  $10^{-4}$ .

Notons que comparativement aux travaux présentés par [15] où le système est linéaire, la loi de commande proposée dans nos travaux apporte une valeur ajoutée aux travaux effectués par [15]. Nous pourrions terminer nos propos en disant que la loi de commande proposée est adaptative et robuste.



## CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Dans ce sujet de maîtrise, deux grands axes ont été développés dans le but d'amener le robot mobile à suivre la trajectoire désirée. Dans un premier temps le développement du modèle non linéaire du robot à partir des différentes lois de Newton-Lagrange et dans un deuxième temps la loi de commande.

Bien que déjà connu par plusieurs chercheurs, la commande par mode glissant utilisée dans notre travail a été adaptée en fonction du contexte du système. Etant donné que le système est non-linéaire et que les paramètres internes du système (robot mobile) ne sont pas maîtrisés avec exactitude, nous avons dû faire appel à la commande par mode glissant adaptative qui prend en compte ces incertitudes.

La valeur ajoutée de notre travail en ce qui concerne la commande des robots mobiles par mode glissant est que nous avons utilisés dans nos simulations un système non linéaire et une commande adaptative et robuste avec un gain dynamique. Les résultats présentés dans les chapitres précédents montrent que la loi de commande élaborée permet au robot de suivre sa trajectoire bien qu'en présence des perturbations. D'ailleurs malgré l'absence des travaux pratiques, nous avons néanmoins rédigé et publié un article de conférence intitulé **“Adaptive sliding mode control of wheeled mobile robot with nonlinear model and uncertainties”** [34] ce qui montrent que les travaux effectués ont été acceptés bien que cela ne reste que des simulations.

Tout de même, le phénomène de broutement (Chattering) reste présent dans la loi de commande. Ceci est dû à la fonction  $sign(.)$ . Afin d'atténuer cette perturbation de hautes fréquences, nous avons fait recours à plusieurs travaux antérieures. Et ceci nous a permis de remplacer la fonction  $sign(.)$  par la fonction tangente hyperbolique  $tanh(.)$ , ajouté à cela nous avons utilisés un gain adaptatif. Ces deux nouvelles améliorations permettent d'adoucir et de générer une nouvelle loi de commande plus efficace que la précédente.

Les travaux de recherches présentés dans ce mémoire ont été satisfaisants, mais il reste tout même plusieurs points à améliorer. Dans l'optique de se rapprocher de la perfection et d'améliorer la loi de commande proposée dans notre travail, il est possible de :

- Utiliser un observateur de perturbation non linéaire afin de supprimer le phénomène de broutement dû à la fonction  $sign(\cdot)$ . Il existe plusieurs méthodes permettant de supprimer le phénomène de broutement [31].
- Supprimer ou d'adoucir les effets néfastes de phénomène de broutement en discrétisant le système et en appliquant un filtre numérique dont les coefficients sont ceux des filtres d'ondelettes [35].
- Améliorer les résultats en utilisant un commutateur de gain lisse. Avec un gain adaptatif, les perturbations de hautes fréquences peuvent être supprimées [29].
- Utiliser un gain adaptatif et remplacer la fonction  $sign(\cdot)$  par  $tanh(\cdot)$ .

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] F. Lavergne, "Méthodologie de synthèse de lois de commandes non-linéaires et robustes: Application au suivi de trajectoire des avions de transport," Université Paul Sabatier-Toulouse III, 2005.
- [2] J. Yazbeck, "Accrochage immatériel sûr et précis de véhicules automatiques," Université de Lorraine, 2014.
- [3] J. Hrbáček, T. Ripel, and J. Krejsa, "Ackermann mobile robot chassis with independent rear wheel drives," in *Proceedings of 14th International Power Electronics and Motion Control Conference EPE-PEMC 2010*, 2010, pp. T5-46-T5-51.
- [4] B. Thuilot, C. Cariou, P. Martinet, and M. Berducat, "Automatic guidance of a farm tractor relying on a single CP-DGPS," *Autonomous robots*, vol. 13, pp. 53-71, 2002.
- [5] P. Daviet and M. Parent, "Longitudinal and lateral servoing of vehicles in a platoon," in *Intelligent Vehicles Symposium, 1996., Proceedings of the 1996 IEEE*, 1996, pp. 41-46.
- [6] S. Sheikholeslam and C. A. Desoer, "Longitudinal control of a platoon of vehicles with no communication of lead vehicle information: A system level study," *IEEE Transactions on vehicular technology*, vol. 42, pp. 546-554, 1993.
- [7] W. Levine and M. Athans, "On the optimal error regulation of a string of moving vehicles," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 11, pp. 355-361, 1966.
- [8] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki, and T. Noguchi, "A stable tracking control method for an autonomous mobile robot," in *Robotics and Automation, 1990. Proceedings., 1990 IEEE International Conference on*, 1990, pp. 384-389.
- [9] R. Fierro and F. L. Lewis, "Control of a nonholonomic mobile robot: backstepping kinematics into dynamics," in *Decision and Control, 1995., Proceedings of the 34th IEEE Conference on*, 1995, pp. 3805-3810.

- [10] B. Dumitrascu, A. Filipescu, and V. Minzu, "Backstepping control of wheeled mobile robots," in *System Theory, Control, and Computing (ICSTCC), 2011 15th International Conference on*, 2011, pp. 1-6.
- [11] H. Xu and S. X. Yang, "Tracking control of a mobile robot with kinematic and dynamic constraints," in *Computational Intelligence in Robotics and Automation, 2001. Proceedings 2001 IEEE International Symposium on*, 2001, pp. 125-130.
- [12] S. Arslan and H. Temeltas, "Robust motion control of a four wheel drive skid-steered mobile robot," in *Electrical and Electronics Engineering (ELECO), 2011 7th International Conference on*, 2011, pp. II-415-II-419.
- [13] D. Chwa, J. H. Seo, P. Kim, and J. Y. Choi, "Sliding mode tracking control of nonholonomic wheeled mobile robots," in *American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002*, 2002, pp. 3991-3996.
- [14] R. Solea, A. Filipescu, and U. Nunes, "Sliding-mode control for trajectory-tracking of a wheeled mobile robot in presence of uncertainties," in *Asian Control Conference, 2009. ASCC 2009. 7th*, 2009, pp. 1701-1706.
- [15] Y. Koubaa, M. Boukattaya, and T. Dammak, "Adaptive sliding-mode dynamic control for path tracking of nonholonomic wheeled mobile robot," *J Autom Syst Eng*, vol. 9, pp. 119-131, 2015.
- [16] J.-M. Yang and J.-H. Kim, "Sliding mode control for trajectory tracking of nonholonomic wheeled mobile robots," *IEEE Transactions on robotics and automation*, vol. 15, pp. 578-587, 1999.
- [17] D. Li and J. Ye, "Adaptive robust control of wheeled mobile robot with uncertainties," in *Advanced Motion Control (AMC), 2014 IEEE 13th International Workshop on*, 2014, pp. 518-523.
- [18] F. N. Martins, W. C. Celeste, R. Carelli, M. Sarcinelli-Filho, and T. F. Bastos-Filho, "An adaptive dynamic controller for autonomous mobile robot trajectory tracking," *Control Engineering Practice*, vol. 16, pp. 1354-1363, 2008.
- [19] L. Xin, Q. Wang, J. She, and Y. Li, "Robust adaptive tracking control of wheeled mobile robot," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 78, pp. 36-48, 2016.

- [20] P. Henaff, "Mises en oeuvre de commandes neuronales par retropropagation indirecte: applications a la robotique mobile," Paris 6, 1994.
- [21] J. G. Ortega and E. Camacho, "Mobile robot navigation in a partially structured static environment, using neural predictive control," *Control Engineering Practice*, vol. 4, pp. 1669-1679, 1996.
- [22] E. Gauthier, "Utilisation des réseaux de neurones artificiels pour la commande d'un véhicule autonome," Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 1999.
- [23] A. Dobra, "General classification of robots. Size criteria," in *Robotics in Alpe-Adria-Danube Region (RAAD), 2014 23rd International Conference on*, 2014, pp. 1-6.
- [24] B. Bayle, "Robotique mobile," *Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg Université Louis Pasteur*, vol. 2007, 2008.
- [25] R. Dhaouadi and A. A. Hatab, "Dynamic modelling of differential-drive mobile robots using lagrange and newton-euler methodologies: A unified framework," *Advances in Robotics & Automation*, vol. 2, pp. 1-7, 2013.
- [26] A. R. Benaskeur, *Aspects de l'application du backstepping adaptatif à la commande décentralisée des systèmes non linéaires*, 2002.
- [27] J.-J. E. Slotine and W. Li, *Applied nonlinear control* vol. 199: Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [28] L. Jinkun and W. Xinhua, "Advanced sliding mode control for mechanical systems: design, analysis and MATLAB simulation," ed: Tsinghua University Press, Beijing CrossRef Google Scholar, 2011.
- [29] J. Zhu and K. Khayati, "New algorithms of adaptive switching gain for sliding mode control: Part I-Ideal case," in *Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), 2014 International Conference on*, 2014, pp. 441-446.
- [30] G. S. Gupta, D. Bailey, S. Demidenko, and D. Carnegie, *Recent Advances in Robotics and Automation* vol. 480: Springer, 2013.
- [31] H. Lee and V. I. Utkin, "Chattering suppression methods in sliding mode control systems," *Annual reviews in control*, vol. 31, pp. 179-188, 2007.

- [32] M. Chen and W. H. Chen, "Sliding mode control for a class of uncertain nonlinear system based on disturbance observer," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 24, pp. 51-64, 2010.
- [33] J. Yang, S. Li, and X. Yu, "Sliding-mode control for systems with mismatched uncertainties via a disturbance observer," *IEEE Transactions on industrial electronics*, vol. 60, pp. 160-169, 2013.
- [34] B. Belobo Mevo, M. R. Saad, and R. Fareh, "Adaptive Sliding Mode Control of Wheeled Mobile Robot with Nonlinear Model and Uncertainties," in *2018 IEEE Canadian Conference on Electrical & Computer Engineering (CCECE)*, 2018, pp. 1-5.
- [35] M. Wu and J.-S. Chen, "The design of chattering alleviated sliding mode control using wavelet approach," in *Automatic Control Conference (CACS), 2013 CACS International*, 2013, pp. 480-485.